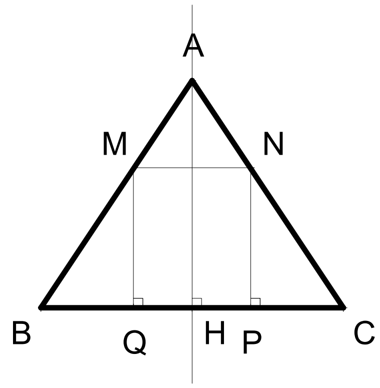
Un rectangle inscrit dans un triangle

Toutes les longueurs sont exprimées en cm.
ABC est un triangle isocèle en A tel que BC = 12.
H est le pied de la hauteur issue de A et AH = 9.
P et Q sont deux points du segment [BC] symétriques par rapport à H, on note HP = HQ = x.
Voici la figure ci-contre.



1°) a. Faire la figure à la règle graduée et au compas pour x = 2.
b. Calculer dans ce cas, l'aire du rectangle MNPQ.

2°) a. Quelles valeurs la variable x peut-elle prendre ?
b. Exprimer les longueurs MQ et QP en fonction de x.
c. En déduire l'aire notée $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x, du rectangle MNPQ.

3°) Dans cette question, on étudie l'aire $\mathcal{A}(x)$.

a. Prouver que $\mathcal{A}(x) = 18x - 3x^2$.
b. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous à l'aide de votre calculatrice :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\mathcal{A}(x)$													

c. Construire dans un repère adapté la courbe $\mathcal{A}(x)$. Quel est le nom de cette courbe ?
d. Etablir à l'aide du graphique, le tableau de variation de $\mathcal{A}(x)$.

4°) On se propose de déterminer les dimensions du rectangle MNPQ d'aire maximale inscrit dans ce triangle.

a. Graphiquement, quelle est la valeur de x pour laquelle l'aire $\mathcal{A}(x)$ est maximale ? Faire les constructions nécessaires sur le graphique. On précisera cette valeur maximale de l'aire.
b. On va démontrer algébriquement que 27 est le maximum de $\mathcal{A}(x)$ sur [0 ; 6].

Rappel de 2^{nde} : une fonction f définie sur un intervalle I admet un maximum M si :
$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ f(x) \leq M}$

- Montrer que l'aire $\mathcal{A}(x)$ peut s'écrire $\mathcal{A}(x) = -3\,[\,(x-3)^2 - 9\,]$.
- En utilisant cette expression de $\mathcal{A}(x)$, montrer que $\mathcal{A}(x) \leq 27$.