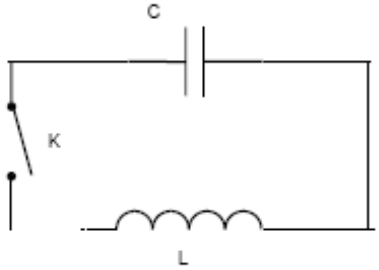
Corrigé extrait de session 2005 Bac Pro EIE
Equations différentielles

Un condensateur de capacité *C* (en Farad), préalablement chargé, est placé dans un circuit inductif, d'inductance *L* (en Henry). Les composants sont supposés parfaits. (résistance négligeable)



A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur. Au cours de la décharge du condensateur, sa charge q(t) en coulomb, vérifie à chaque instant t , l'équation différentielle :

$$Lq''(t)+\frac{1}{C}q(t)=0$$

1. On donne L = 100 mH et C = 10 µF
   Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire
   $$q''(t)+10^6 q(t)=0$$
   $$Lq''(t)+\frac{1}{Qq}(t)=0 \Leftrightarrow 100\times 10^{-3} q''(t)+\frac{1}{10\times 10^{-6}}q(t)=0 \Leftrightarrow 10^{-1} q''(t)+10^5 q(t)=0$$
   soit après multiplication par 10
   $$q''(t)+10^6 q(t)=0$$

2. On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y''+10^6 y=0$
   où *y* est une fonction de la variable *x*, définie sur ℝ et *y*'' sa fonction dérivée seconde.
   a. En utilisant le formulaire, donner la solution générale de l'équation différentielle (E)
      Cette équation est de la forme $y''+\omega^2 y=0$ avec $\omega=10^3$
      On obtient $y''+(10^3)^2 y=0$
      Elle a donc pour solution : $y=a\cos 10^3 x+b\sin 10^3 x$
   b. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0{,}01$.
      $y(0)=0 \Leftrightarrow a\cos 0+b\sin 0=0 \Leftrightarrow a\cos 0=0 \Leftrightarrow a=0$
      $y'(x)=-10^3 a\sin 10^3 x+10^3 b\cos 10^3 x$
      $y'(0)=0{,}01 \Leftrightarrow -10^3 a\sin 0+10^3 b\cos 0=0{,}01 \Leftrightarrow 10^3 b\cos 0=0{,}01$
      $\Leftrightarrow b=\frac{0{,}01}{10^3}=10^{-5}$
      La solution est donc $y=10^{-5}\sin 10^3 x$