

Corrigé extrait session 2005 bac pro bio industries de transformation Etude de fonction

Les confitures précédentes sont contenues dans des pots de verre de forme cylindrique et de volume 192 cm^3 .

On estime que, pour ce volume, la quantité Q nécessaire à la fabrication d'un pot varie en fonction de son rayon r selon la relation : $Q = 3r^2 + \frac{384}{r}$

L'objet de cet exercice est de déterminer la valeur du rayon r pour laquelle la quantité Q de verre est minimale puis pour une quantité de verre $Q = 150$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle par $[2 ; 6]$ par : $f(x) = 3x^2 + \frac{384}{x}$

Avec les notations précédentes, on a : $Q = f(r)$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f .

$$f(x) = 3x^2 + \frac{384}{x} \text{ d'où } f'(x) = 6x - \frac{384}{x^2}$$

2. a. Développer l'expression $6(x-4)(x^2+4x+16)$.

$$6(x-4)(x^2+4x+16) = (6x-24)(x^2+4x+16) = 6x^3 + 24x^2 + 96x - 24x^2 - 96x - 384 = 6x^3 - 384$$

- b. Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{6(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2}$

$$f'(x) = 6x - \frac{384}{x^2} = \frac{6x^3}{x^2} - \frac{384}{x^2} = \frac{6x^3 - 384}{x^2} \text{ or } 6x^3 - 384 = 6(x-4)(x^2+4x+16)$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{6(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2}$$

3. Sur l'intervalle $[2 ; 6]$, $f'(x)$ est du signe de $x-4$. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 6]$.

- $f'(x) \geq 0$ pour $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$
- $f'(x) < 0$ pour $x < 4$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 6]$.

x	2	4	6
signe de $f'(x)$	-	0	+
f	204	144	172

5. Dédurre de la question précédente la valeur de r pour laquelle la quantité de verre Q est minimale.

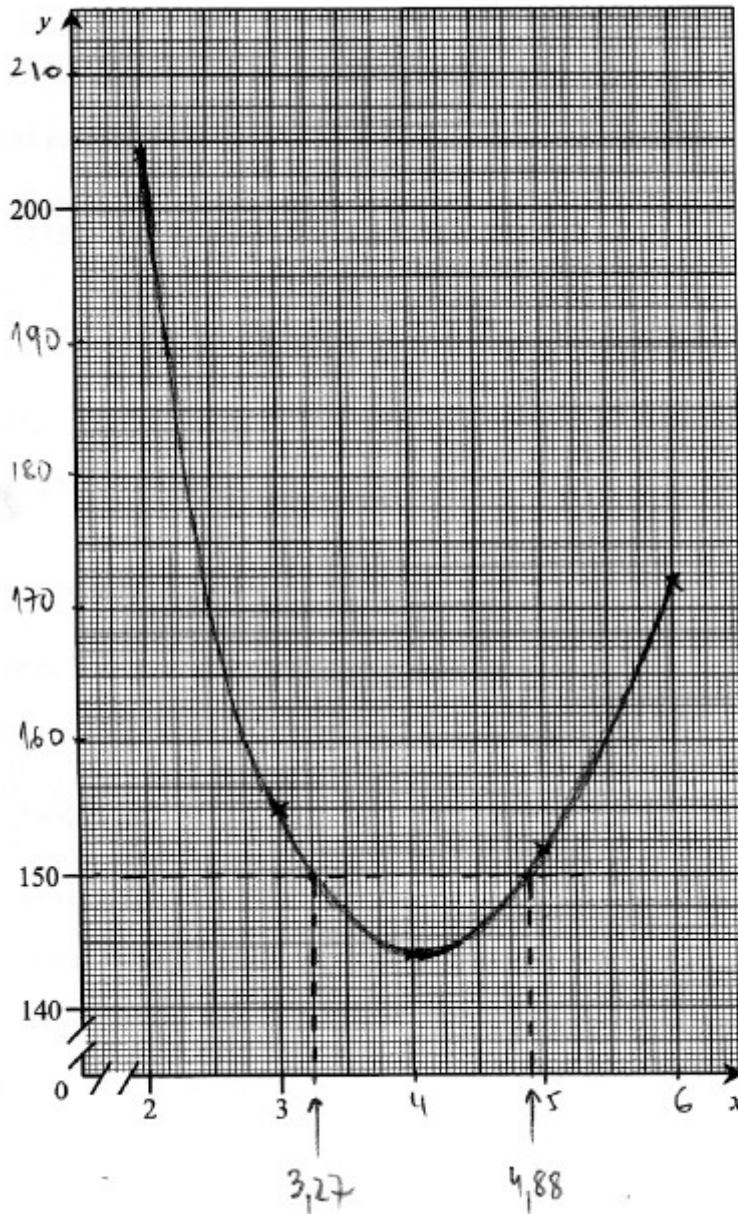
Quelle est alors la valeur de Q correspondante ?

La quantité de verre Q est minimale lorsque $r=4$ cm
 $Q_{min} = f(4) = 144$

6. a. Compléter le tableau de valeurs

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	204	155	144	158	172

b. Tracer la représentation graphique de la fonction f .



7. A l'aide de la représentation graphique précédente, déterminer les rayons possibles d'un pot lorsque la quantité de verre utilisée est égale à $Q=150$
 D'après la représentation graphique, les valeurs possibles des rayons pour que $Q=150$ sont : $r_1=3,27$ et $r_2=4,88$ à 0,05 près.