Fonctions logarithmes
Corrigé activité

1. Résolution d'une équation de type $(a + x)^n = k$

- $(1 + x)^5 = 7 \Leftrightarrow \log(1 + x)^5 = \log 7 \Leftrightarrow 5\log(1 + x) = \log 7$

  $\log(1 + x) = \frac{1}{5}\log 7 \Leftrightarrow \log(1 + x) = \log 7^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + x = 7^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{5}} - 1 =$ 0,48

- $(1 + x)^{12} = 40 \Leftrightarrow \ln(1 + x)^{12} = \ln 40 \Leftrightarrow 12 \ln(1 + x) = \ln 40$

  $\ln(1 + x) = \frac{1}{12}\ln 40 \Leftrightarrow \ln(1 + x) = \ln 40^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow 1 + x = 40^{\frac{1}{12}}$

  $x = 40^{\frac{1}{12}} - 1 =$ 0,36

- $(3 + x)^4 = 21 \Leftrightarrow \log(3 + x)^4 = \log 21 \Leftrightarrow 4 \log(3 + x) = \log 21$

  $\log(3 + x) = \frac{1}{4}\log 21 \Leftrightarrow \log(3 + x) = \log 21^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3 + x = 21^{\frac{1}{4}}$

  $x = 21^{\frac{1}{4}} - 3 =$ – 0,86

- $(1 + 4x)^{11} = 320 \Leftrightarrow \ln(1 + 4x)^{11} = \ln 320 \Leftrightarrow 11 \ln(1 + 4x) = \ln 320$

  $\ln(1 + 4x) = \frac{1}{11}\ln 320 \Leftrightarrow \ln(1 + 4x) = \ln 320^{\frac{1}{11}} \Leftrightarrow 1 + 4x = 320^{\frac{1}{11}}$

  $4x = 320^{\frac{1}{11}} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(320^{\frac{1}{11}} - 1) =$ 0,17

- $(x - 5)^4 = 32 \Leftrightarrow \log(x - 5)^4 = \log 32 \Leftrightarrow 4 \log(x - 5) = \log 32$

  $\log(x - 5) = \frac{1}{4}\log 32 \Leftrightarrow \log(x - 5) = \log 32^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x - 5 = 32^{\frac{1}{4}}$

  $x = 32^{\frac{1}{4}} + 5 =$ 7,38

- $(2x + 7)^5 = 200 \Leftrightarrow \ln (2x + 7)^5 = \ln 200 \Leftrightarrow 5 \ln (2x + 7) = \ln 200$

  $\ln (2x + 7) = \frac{1}{5}\ln 200 \Leftrightarrow \ln (2x + 7) = \ln 200^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 2x + 7 = 200^{\frac{1}{5}}$

  $2x = 200^{\frac{1}{5}} - 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(200^{\frac{1}{5}} - 7) =$ – 2,06

- Soit t le taux d'intérêt annuel, C_0 le capital initial.
  On obtient la relation : $2\,C_0 = C_0\,(1 + t)^{12} \Leftrightarrow (1 + t)^{12} = 2$

  $\log (1 + t)^{12} = \log 2 \Leftrightarrow 12 \log(1 + t) = \log 2 \Leftrightarrow \log(1 + t) = \frac{1}{12}\log 2$

  $\log(1 + t) = \log 2^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow 1 + t = 2^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow t = 2^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0595$

  Le taux annuel permettant de doubler la capital placé en 12 ans est 5,95 %

- $C_n = C_0\,(1 + t)^n$ soit $5\,500 + 2\,271{,}36 = 5\,500\,(1 + t)^{14}$

  $7\,771{,}36 = 5\,500\,(1 + t)^{14} \Leftrightarrow \frac{7\,771{,}36}{5\,500} = (1 + t)^{14} \Leftrightarrow 1{,}413 = (1 + t)^{14}$

$\ln 1{,}413 = \ln (1 + t)^{14} \Leftrightarrow \ln 1{,}413 = 14 \ln (1 + t) \Leftrightarrow \ln (1 + t) = \dfrac{1}{14} \ln 1{,}413$

$\ln (1 + t) = \ln 1{,}413^{\frac{1}{14}} \Leftrightarrow 1 + t = 1{,}413^{\frac{1}{14}} \Leftrightarrow t = 1{,}413^{\frac{1}{14}} - 1 = 0{,}025$

Le taux annuel de placement est 2,5 %

2. Résolution d'une équation de type $a^x = b$

- $5^x = 625 \Leftrightarrow \log 5^x = \log 625 \Leftrightarrow x \log 5 = \log 625 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 625}{\log 5} = 4$
- $1{,}02^x = 24 \Leftrightarrow \ln 1{,}02^x = \ln 24 \Leftrightarrow x \ln 1{,}02 = \ln 24 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 24}{\ln 1{,}02} = 160{,}49$
- $3^{(x+1)} = 124 \Leftrightarrow \log 3^{(x+1)} = \log 124 \Leftrightarrow (x + 1) \log 3 = \log 124$
  $x + 1 = \dfrac{\log 124}{\log 3} \Leftrightarrow x = 4{,}39 - 1 = 3{,}39$
- $0{,}25^{(x-2)} = 64 \Leftrightarrow \ln 0{,}25^{(x-2)} = \ln 64 \Leftrightarrow (x - 2) \ln 0{,}25 = \ln 64$
  $x - 2 = \dfrac{\ln 64}{\ln 0{,}25} \Leftrightarrow x = -3 + 2 = -1$
- $4{,}5^{(2x+1)} = 200 \Leftrightarrow \log 4{,}5^{(2x+1)} = \log 200 \Leftrightarrow (2x + 1) \log 4{,}5 = \log 200$
  $2x + 1 = \dfrac{\log 200}{\log 4{,}5} \Leftrightarrow 2x = 3{,}52 - 1 \Leftrightarrow 2x = 2{,}52 \Leftrightarrow x = 1{,}26$
- $2^{(3x-2)} = 4\,096 \Leftrightarrow \ln 2^{(3x-2)} = \ln 4\,096 \Leftrightarrow (3x - 2) \ln 2 = \ln 4\,096$
  $3x - 2 = \dfrac{\ln 4096}{\ln 2} \Leftrightarrow 3x = 12 + 2 \Leftrightarrow x = 4{,}67$
- $P_x = P \times (0{,}90)^x$
  - $P_4 = 150 \times 0{,}90^4 = 98{,}42$. Après 4 ans, la valeur de l'objet n'est plus que de 98,42 €
  - $\dfrac{P}{2} = P \times 0{,}90^x \Leftrightarrow 0{,}9^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log 0{,}9^x = \log 0{,}5$
    $x \log 0{,}9 = \log 0{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 9} = 6{,}57$
    L'objet aura perdu la moitié de sa valeur au bout de 7 ans
  - $C_n = C_0 (1 + 0{,}045)^n$ soit $17\,721{,}96 = 10\,000\,(1{,}045)^n$
    $(1{,}045)^n = 1{,}772196 \Leftrightarrow \ln(1{,}045)^n = \ln 1{,}772196$
    $n \ln(1{,}045) = \ln 1{,}772196 \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln 1{,}772196}{\ln 1{,}045} = 13$
    Le capital sera de 17 721,96 au bout de 13 ans.
  - $C_n = C_0 (1 + 0{,}045)^n$ soit $47\,000 = 23\,500\,(1{,}0325)^n$
    $1{,}0325^n = 2 \Leftrightarrow \log 1{,}0325^n = \log 2 \Leftrightarrow n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}0325} = 21{,}67$
    Le capital de 23 500 sera doublé au bout de 22 ans.