Approximation des signaux périodiques

I. Introduction

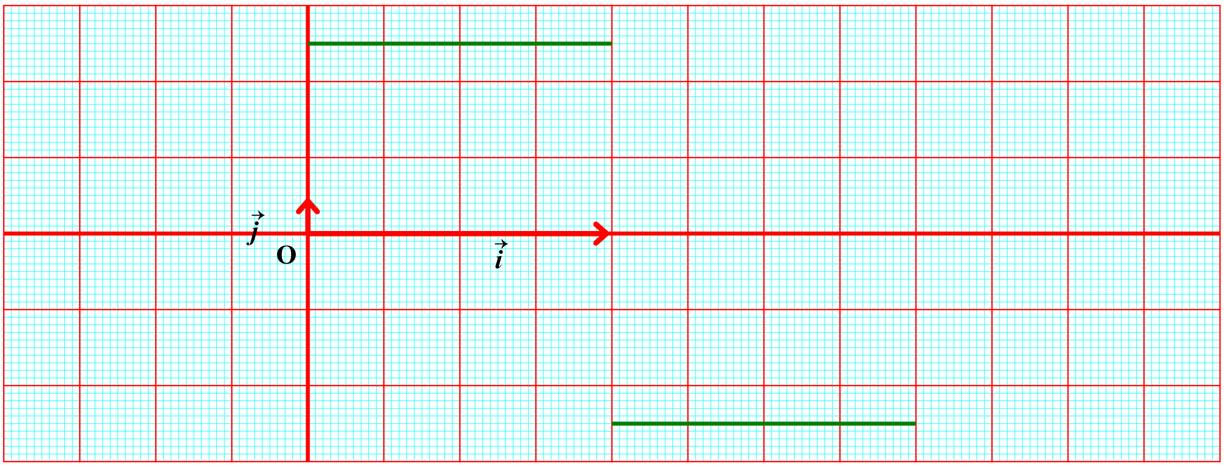
Un signal est un phénomène (électrique par exemple) porteur d'une ou plusieurs informations et dont les variations sont étudiées en fonction du temps. Le but de ce chapitre est de donner une approximation de ce signal périodique, c'est à dire de le définir par une fonction polynôme trigonométrique au lieu de le décrire par une fonction définie par morceaux.

II. Découverte d'un polynôme trigonométrique

On considère la fonction définie par morceaux :

$f(x) = 5$ pour $0 < x < 1$ et $f(x) = -5$ pour $1 < x < 2$.

Cette fonction a la représentation graphique suivante :



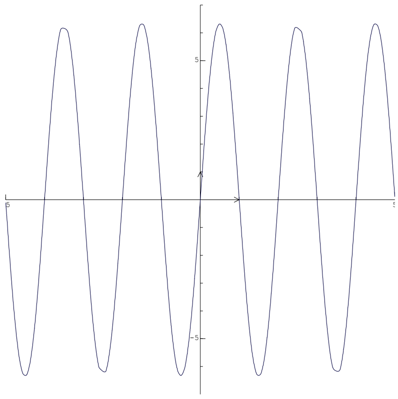
Nous allons essayer de la modéliser par une fonction polynôme trigonométrique, pour cela, en utilisant votre calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions polynômes suivantes :

$$y_1 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t)$$

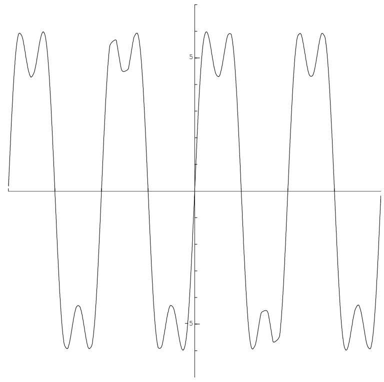
$$y_3 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t)$$

$$y_5 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t) + \frac{20}{5\times\pi}\sin(5\times\pi\times t)$$

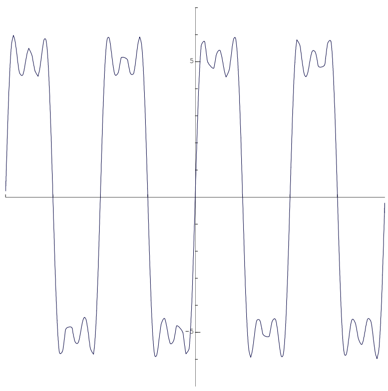
$$y_7 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t) + \frac{20}{5\times\pi}\sin(5\times\pi\times t) + \frac{20}{7\times\pi}\sin(7\times\pi\times t)$$



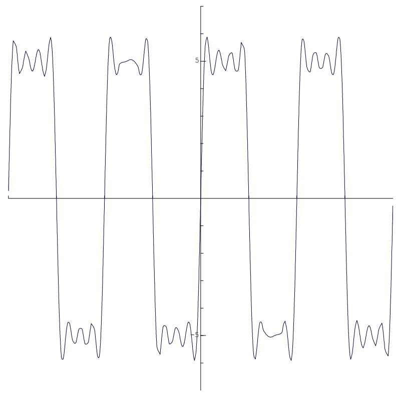
$$y_1 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t)$$



$$y_3 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t)$$



$$y_5 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t) + \frac{20}{5\times\pi}\sin(5\times\pi\times t)$$



$$y_7 = f(t) = \frac{20}{\pi}\sin(\pi \times t) + \frac{20}{3\times\pi}\sin(3\times\pi\times t) + \frac{20}{5\times\pi}\sin(5\times\pi\times t) + \frac{20}{7\times\pi}\sin(7\times\pi\times t)$$

Conclusion : on peut modéliser un signal périodique par une fonction polynôme trigonométrique.

III. <u>Polynôme trigonométrique</u>

Un polynôme trigonométrique ou polynôme de Fourier, est une expression de la forme :

$$P_n(t) = a_o + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \ldots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

Le terme a_0 est la valeur moyenne du signal.

Le terme $f_1(t) = a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ est la terme fondamental du signal.

Le terme $f_n(t) = a_n\cos(\omega t) + b_n\sin(\omega t)$ est l'harmonique de rang k du signal.

L'amplitude de l'harmonique de rang k est donné par : $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

L'approximation de la fonction f par le polynôme trigonométrique P_n est d'autant meilleure que le nombre de termes du polynôme est grand.

IV. Valeur moyenne et valeur efficace d'une fonction

La valeur moyenne m d'une fonction f sur un intervalle [a;b] est le nombre :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

La valeur efficace e d'une fonction f périodique de période T sur un intervalle [a;b] est le nombre :

$$e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx}$$

Application :

Dans un circuit électrique, il circule un courant alternatif sinusoïdale qui peut être décrit par la fonction :

$i(t) = Im \sin(\omega t)$

où Im est la valeur maximale de l'intensité et w la pulsation du courant qui est liée à la période par
$\omega = (2 \times \pi) / T$.
Im = 6A et T = 20ms.

1. Représenter dans un repère orthogonal (échelle : en abscisse 1cm pour 0,01 (entre –0,02 et 0,02) et en ordonnée 1cm pour 2 (entre –8 et 8).

2. Calculer la valeur moyenne sur une période de l'intensité dans le circuit.

3. Calculer la valeur efficace de l'intensité dans le circuit. La comparer à la valeur maximale.

V. Méthode pour calculer les premiers harmoniques d'une fonction signal

Le polynôme de Fourier s'écrit : $P_n(t) = a_o + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Soit f la fonction associée à un signal périodique de période T. Pour calculer les différents coefficients, on procède de la manière suivante :

- Si f est paire alors $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.
- Si f est impaire alors $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

a_0 est la valeur moyenne du signal, elle se calcule par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

Les coefficients suivants se calculent par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ \cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ \sin(n\omega t)dt$$

Application :

On considère la fonction f périodique de période 2π et définie pour t appartenant à $[0 ; 2\pi]$ par $f(t) = 3$ pour $0 < t < \pi$ et $f(t) = 0$ pour $\pi < t < 2\pi$.

1. Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (trois périodes).
2. Calculer l'ensemble des coefficients du polynôme $P_2(t)$ de Fourier correspondant au deuxième harmonique.
3. Tracer avec votre calculatrice la fonction polynôme $P_2(t)$. L'approximation de la fonction est-elle bonne ? Comment pourrait-on améliorer l'approximation de la fonction f ?

VI. Energie moyenne transportée par un signal. Formule de Parseval

Une approximation de l'énergie moyenne transportée par un signal est donnée par la formule de Parseval. Cette énergie va dépendre du nombre d'harmonique donné par le polynôme de Fourier.

$$E \approx a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_n^2 + b_n^2)$$

Application :

1. Dans l'exercice du chapitre précédent, calculer cette énergie si on prend $P_2(t)$ comme approximation du signal.
2. Refaire le même calcul en prenant $P_3(t)$ puis $P_5(t)$ comme approximation du signal.