Géométrie vectorielle – Utilisation du produit scalaire

Quelques rappels :

Calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$. On donne A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B)

- Expression des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,(\,x_B - x_A,\ y_B - y_A\,)} \text{ ou } \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

- Expression de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\|\,\overrightarrow{AB}\,\| = \sqrt{X_{\overrightarrow{AB}}^{2} + Y_{\overrightarrow{AB}}^{2}} = \sqrt{(\,x_B - x_A\,)^2 + (\,y_B - y_A\,)^2}}$$

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

- Expression du produit scalaire en fonction des normes :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\ \|\,\vec{u} + \vec{v}\,\|^2 - \|\,\vec{u}\,\|^2 - \|\,\vec{v}\,\|^2}$$

- Expression analytique du produit scalaire pour $\vec{u}(\ x\ ;\ y\ )$ et $\vec{v}(\ x'\ ;\ y'\ )$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

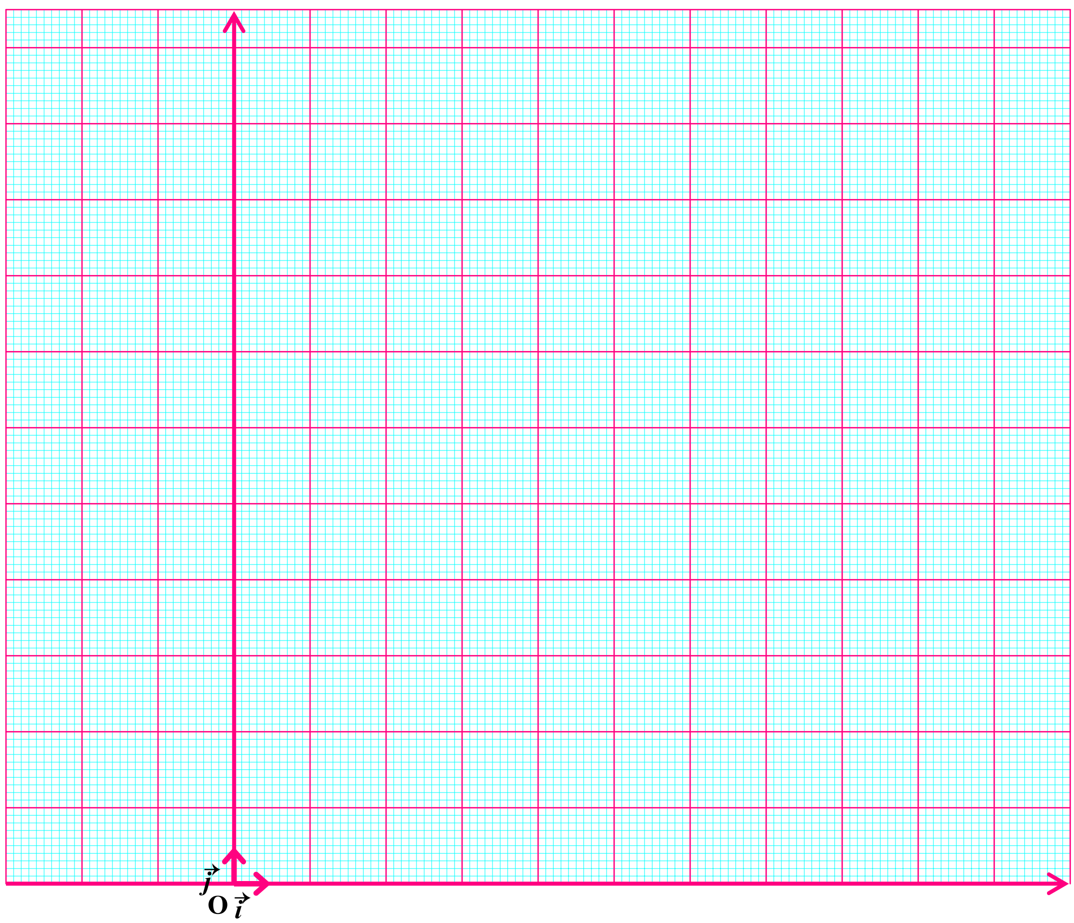
- Expression géométrique du produit scalaire :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\,\vec{u}\,\|\ .\ \|\,\vec{v}\,\|\ \cos\,(\vec{u},\ \vec{v})} \text{ avec } \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} > 0 \text{ si l'angle } (\vec{u},\ \vec{v}\,) \text{ est aigu} \\ \vec{u}.\vec{v} < 0 \text{ si l'angle } (\vec{u},\ \vec{v}\,) \text{ est obtu.} \end{cases}$$

Exercice n°1

Extrait Bac pro maintenance automobile_2001

Les dessins seront faits sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan représenté ci-dessous.



Question n°1 :

a) Placer les points A(1,5 ; 1) et B(19,5 ; 2). Tracer $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer la norme $\| \overrightarrow{AB} \|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au centimètre près.

Question n°2 :

Soient les points A'(-1,5 ; 1) et B'(-1,5 ; y).

a) Placer le point A'.

b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de y.

Question n°3 :

On se propose de calculer l'ordonnée y du point B' telle que $\| \overrightarrow{A'B'} \| = 18$.

a) Montrer que la relation $\| \overrightarrow{A'B'} \| = 18$ peut s'écrire : $y^2 - 2y - 323 = 0$

b) Résoudre cette équation du second degré en y.

c) En ne prenant que la solution positive, déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

d) Tracer $\overrightarrow{A'B'}$.

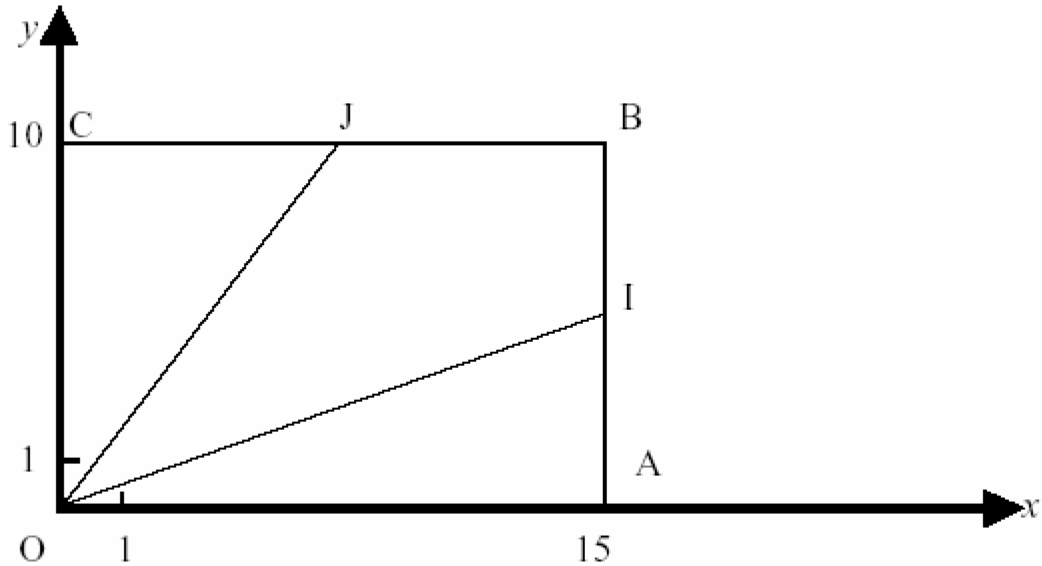
Question n°4 :

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}$.

b) Déterminer l'angle α des deux vecteurs.

Exercice n°2 *Extrait Bac pro artisanat et métiers d'art_2001*

Le rectangle OABC ci-dessous représente la scène d'un théâtre vue de dessus. Les dimensions de la scène sont OA = 15 m et OC = 10 m.. Au point O, on place un spot permettant d'éclairer la zone limitée par les segments de droite [OI] et b[OJ] où I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CB].
Le plan est muni du repère orthonormal donné sur la figure, d'origine O et d'unité graphique le cm.



1- Ecrire, sans justification, les coordonnées des points I et J.
On rappelle que ce sont aussi les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

2- Montrer, en donnant le détail des calculs, que le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}$ est égal à 162,5.

3- Calculer la norme $\| \overrightarrow{OI} \|$ = OI du vecteur $\overrightarrow{OI}$. Arrondir le résultat au centième.

4- Calculer la norme $\| \overrightarrow{OJ} \|$ = OJ du vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

5- Dans la suite, on prend OI = 15,8 et OJ = 12,5. En utilisant l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs normes, calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{IOJ}$ correspondant à la zone éclairée.