# Géométrie vectorielle – Utilisation du produit scalaire

## Quelques rappels :

**Calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$. On donne A( $x_A$, $y_A$ ) et B( $x_B$, $y_B$ )**

- Expression des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A,\ y_B - y_A)} \text{ ou } \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

- Expression de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{X_{\overrightarrow{AB}}^2 + Y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

**Calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**

- Expression du produit scalaire en fonction des normes :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]}$$

- Expression analytique du produit scalaire pour $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

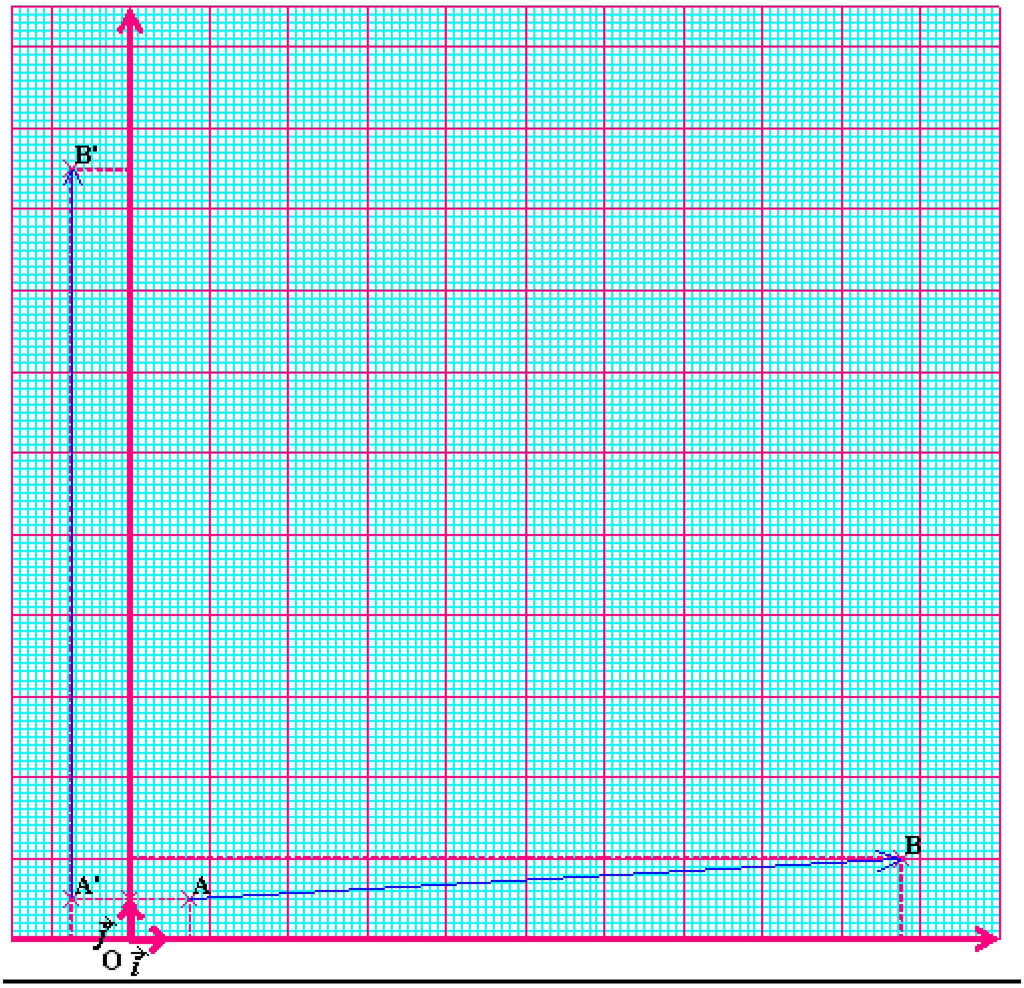
- Expression géométrique du produit scalaire :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})} \text{ avec } \begin{cases} \vec{u}.\vec{v} > 0 \text{ si l'angle } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est aigu} \\ \vec{u}.\vec{v} < 0 \text{ si l'angle } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est obtu.} \end{cases}$$

## Exercice n°1

*Extrait Bac pro maintenance automobile_2001*

Les dessins seront faits sur le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan représenté ci-dessous.



## Question n°1 :

a) Placer les points A( 1,5 ; 1 ) et B( 19,5 ; 2 ). Tracer $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 19{,}5 - 1{,}5 \\ y_B - y_A = 2 - 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer la norme $\| \overrightarrow{AB} \|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au centimètre près.

$$\boxed{\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{X_{\overrightarrow{AB}}^2 + Y_{\overrightarrow{AB}}^2}} \text{ soit } \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{18^2 + 1^2} = 5\sqrt{13} \approx 18$$

## Question n°2 :

Soient les points A'( -1,5 ; 1 ) et B'( -1,5 ; y ).

a) Placer le point A'.

b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de y.

$$\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} = -1{,}5 - (-1{,}5) \\ y_{B'} - y_{A'} = y - 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 0 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

## Question n°3 :

On se propose de calculer l'ordonnée y du point B' telle que $\| \overrightarrow{A'B'} \| = 18$.

a) Montrer que la relation $\| \overrightarrow{A'B'} \| = 18$ peut s'écrire : $y^2 - 2y - 323 = 0$

$$\boxed{\| \overrightarrow{A'B'} \| = \sqrt{X_{\overrightarrow{A'B'}}^2 + Y_{\overrightarrow{A'B'}}^2}} \text{ soit } \| \overrightarrow{A'B'} \| = \sqrt{0^2 + (y-1)^2}$$

**On a alors l'égalité suivante :** $\sqrt{(y-1)^2} = 18$ soit

$$(y-1)^2 = 18^2$$
$$y^2 - 2y + 1 = 324$$
$$\boxed{y^2 - 2y - 323 = 0}$$

b) Résoudre cette équation du second degré en y.

**Calcul du discriminant Δ :** $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-323) = \underline{1296 > 0}$

**Le trinôme admet dont deux racines :**

$$\boxed{y_1 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ soit } y_1 = \frac{2 - \sqrt{1296}}{2} = \frac{2 - 36}{2} = -17$$

$$\boxed{y_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ soit } y_2 = \frac{2 - \sqrt{1296}}{2} = \frac{2 + 36}{2} = 19$$

**Les solutions de l'équation proposée sont -17 et 19.**

c) En ne prenant que la solution positive, déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$. $\boxed{\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}}$

d) Tracer $\overrightarrow{A'B'}$.

## Question n°4 :

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'} = X_{\overrightarrow{AB}}X_{\overrightarrow{A'B'}} + Y_{\overrightarrow{AB}}Y_{\overrightarrow{A'B'}}} \text{ d'où } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'} = 0 \times 18 + 18 \times 1 = 18$$

b) Déterminer l'angle α des deux vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'} = \| \overrightarrow{AB} \| . \| \overrightarrow{A'B'} \| . \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$$

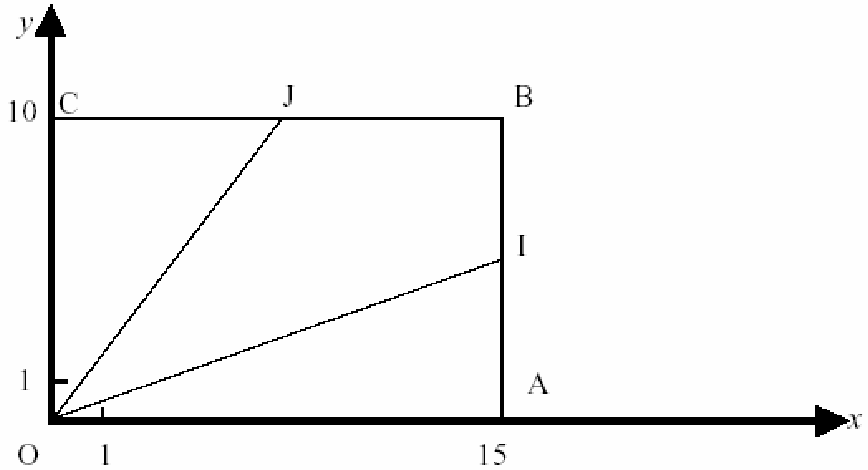
soit $$\boxed{\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}}{\| \overrightarrow{AB} \| . \| \overrightarrow{A'B'} \|}}$$

d'où $$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \frac{18}{18 \times 18} = \frac{1}{18}$$

soit $$\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \alpha = 86{,}8°}$$

## Exercice n°2 *Extrait Bac pro artisanat et métiers d'art_2001*

Le rectangle OABC ci-dessous représente la scène d'un théâtre vue de dessus. Les dimensions de la scène sont OA = 15 m et OC = 10 m.
Au point O, on place un spot permettant d'éclairer la zone limitée par les segments de droite [OI] et b[OJ] où I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CB].
Le plan est muni du repère orthonormal donné sur la figure, d'origine O et d'unité graphique le cm.




1- Ecrire, sans justification, les coordonnées des points I et J. $\boxed{I(15, 5)}$ $\boxed{J(7{,}5\ ;\ 10)}$

On rappelle que ce sont aussi les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

2- Montrer, en donnant le détail des calculs, que le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}$ est égal à 162,5.

$\boxed{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = X_{\vec{OI}}X_{\vec{OJ}} + Y_{\vec{OI}}Y_{\vec{OJ}}}$ **soit** $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = 15 \times 7{,}5 + 5 \times 10$ **soit** $\boxed{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = 162{,}5}$

3- Calculer la norme $\|\overrightarrow{OI}\|$ = OI du vecteur $\overrightarrow{OI}$. Arrondir le résultat au centième.

$\boxed{OI = \sqrt{X_{\vec{OI}}^2 + Y_{\vec{OI}}^2}}$ **soit** $OI = \sqrt{15^2 + 5^2}$ **d'où** $\boxed{OI = 5\sqrt{10} \approx 15{,}8}$

4- Calculer la norme $\|\overrightarrow{OJ}\|$ = OJ du vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

$\boxed{OJ = \sqrt{X_{\vec{OJ}}^2 + Y_{\vec{OJ}}^2}}$ **soit** $OJ = \sqrt{7{,}5^2 + 10^2}$ **d'où** $\boxed{OJ = 12{,}5}$

5- Dans la suite, on prend OI = 15,8 et OJ = 12,5. En utilisant l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs normes, calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{IOJ}$ correspondant à la zone éclairée.

$\boxed{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \|\overrightarrow{OI}\|.\|\overrightarrow{OJ}\|.\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})}$ soit $\boxed{\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = \dfrac{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}}{\|\overrightarrow{OI}\|.\|\overrightarrow{OJ}\|}}$

**d'où** $\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = \dfrac{162{,}5}{15{,}8 \times 12{,}5}$ $\boxed{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) = 35°}$ **arrondi au degré.**