Calcul intégral

I. Primitives d'une fonction

Définition : une fonction **F** est **une primitive** d'une fonction f sur un intervalle si, pour tout x de cet intervalle, la fonction f est la dérivée de F : **F ' (x) = f(x).** Toutes les primitives de la fonction f sont les fonctions définies par F(x) + C où C est une constante réelle quelconque.

Construisons un tableau de primitives en complétant le tableau suivant :

Fonction f	**Primitive F de la fonction f**
f(x) = 0	F(x) =
f(x) =	F(x) = ax + C
f(x) =	F(x) = $\frac{1}{2}x^2 + C$
f(x) = x^2	F(x) =
f(x) =	F(x) = $-\frac{1}{x} + C$
f(x) =	F(x) = ln x + C
f(x) = e^x	F(x) =
f(x) =	F(x) = $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
f(x) = sin x	F(x) =
f(x) = cos x	F(x) =

Remarque : si U et V sont les primitives de u et v alors on a :

- **u + v qui admet pour primitive U + V**
- **λu qui admet pour primitive λU.**

Applications :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$f(x) = 5x + 2$

$g(x) = -x + 6$

$h(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$i(x) = 1 - 3\sin(3x)$

$j(x) = 3x - 4e^x$

$k(x) = -2x + \frac{1}{x}$

$l(x) = \frac{1-2x}{x^2}$

$m(x) = \frac{2}{x}$

$n(x) = e^{4x+2}$

$o(x) = 3\cos(3x) + 2\sin(2x) + 3x + 1$

II. Intégrale définie d'une fonction

Définition :

On considère une fonction f qui admet une primitive F sur un intervalle [a ; b]. Le nombre F(b) – F(a) est l'intégrale définie de la fonction f entre les valeurs a et b de la variable. Les nombres a et b sont nommés bornes d'intégration. L'écriture mathématique de ce nombre est la suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$$

Remarque : le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de f(x) dx ».

Application :

Calculer l'intégrale $\int_2^3 (3x+1)\,dx$.

Méthode :

- *repérer la fonction f(x) dont on doit déterminer une primitive :* f(x) =
- *déterminer une primitive de f(x) :* F(x) =
- *calculer* F(3) =
- *calculer* F(2) =
- *effectuer* F(3) – F(2) =
- *conclure* : $\int_2^3 (3x+1)\,dx$ =

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-2}^{5} (2x-2)\,dx =$

$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} (\sin x)\,dx =$

$\int_0^5 (\frac{2}{x})\,dx =$

$\int_1^3 (e^x)\,dx =$

$\int_1^3 (\frac{3x^2+1}{x^2})\,dx =$

$\int_0^{\frac{p}{4}} (\cos x)\,dx =$

$\int_2^5 (2x^2+1)\,dx =$

III. Calcul d'une aire à l'aide d'une intégrale

Si on considère une fonction f positive et définie sur un intervalle [a ; b], l'aire A du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b est égale à l'intégrale définie de f sur l'intervalle [a ; b] :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Application :

1. Dans un repère orthogonal (échelle : 1cm pour une unité en abscisse et 1cm pour 3 unités en ordonnée), tracer la courbe représentative de la fonction f définie pour x appartenant à [0 ; 7] par $f(x) = 0{,}5\,x^2$.
2. Représenter d'une couleur différente l'aire délimitée par les droites d'équation x = 3, x = 6, par la courbe représentative de la fonction f et par l'axe des abscisses.
3. Déterminer la valeur de cette aire.

IV. Propriétés des intégrales

1. Relation de Chasles

Si f est une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, si a, b et c sont trois nombres de cet intervalle alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \quad + \quad \int_b^c f(x)dx \quad = \quad \int_a^c f(x)dx}$$

2. Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I, on a :

$$\boxed{\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx \quad = \quad \int_a^b f(x)dx \quad + \quad \int_a^b g(x)dx}$$

3. Si f est une fonction admettant des primitives sur un intervalle I et λ un réel quelconque, alors on a :

$$\boxed{\int_a^b l\ f(x)dx \quad = \quad l\int_a^b f(x)dx}$$

V. Exercices

Exercice 1

Dans un repère orthonormal, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g et calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes :

$f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x)= x$

Exercice 2

Sachant que $\cos(2x) = \cos^2 x - 1$ et en utilisant les propriétés du IV. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x\, dx$$

Exercice 3

En vous servant de l'exercice 2 et en sachant que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x\, dx$$