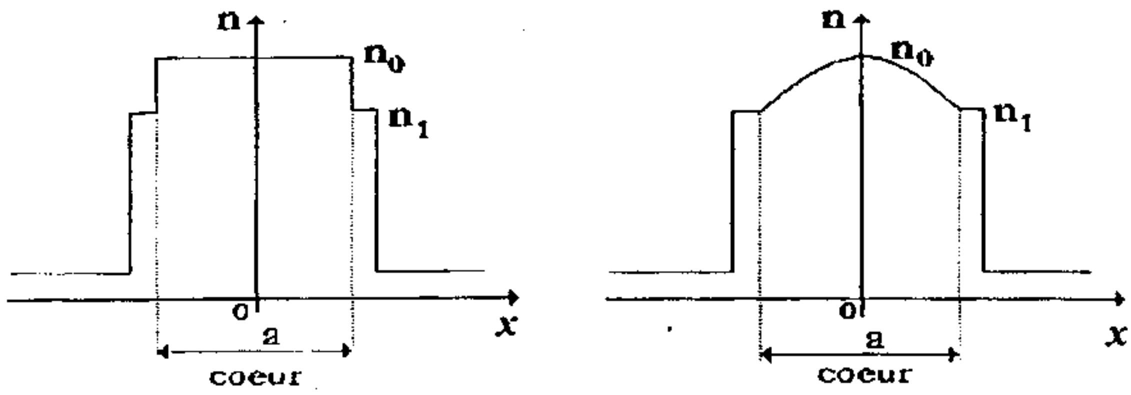
<u>Exercice 1</u> : Calcul du nombre de modes dans une fibre optique *(5 points)*

On distingue deux sortes de fibres optiques, suivant que l'indice de réfraction du coeur est constant ou varie graduellement en fonction de la distance x au centre de la fibre (voir figure ci-dessous). Le calcul du nombre de modes se propageant dans la fibre dépend de la nature de celle-ci.



a/ Fibre à saut d'indice   b/ Fibre à gradient d'indice

Profil de l'indice de réfraction n suivant le type de fibre

Dans toute la suite, on désigne par : n_0, l'indice de réfraction au centre du coeur de la fibre
n_1, l'indice de réfraction de la gaine de la fibre
a, le diamètre du coeur de la fibres
λ, la longueur d'onde de la source d'éclairage.

1. Fibre à saut d'indice

Le nombre de mode dans une fibre à saut d'indice, N_s, est donné par la relation :

$$N_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_0^2 - n_1^2) \cdot I_s \qquad \text{où } I_s \text{ désigne l'intégrale : } I_s = \int_0^a x\,dx$$

Calculer I_s en fonction de a

2. Fibre à gradient d'indice

Le nombre de modes dans une fibre à gradient d'indice, N_g, est donné par la relation :

$$N_g = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_0^2 - n_1^2) \cdot I_g \qquad \text{avec } I_g = \frac{a^2}{4}$$

Quelle relation peut-on écrire entre N_g et N_s ?

3. Application numérique

Finalement, on obtient comme expression pour N_s et N_g en fonction de n_0, n_1, λ et a :

$$N_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n_0^2 - n_1^2) \cdot a^2, \qquad \text{avec } N_g = \frac{N_s}{2}$$

Les caractéristiques communes des deux fibres et de l'éclairage sont les suivantes :

$n_1 = 1{,}47$; $n_0 - n_1 = 0{,}01$; $\lambda = 0{,}85\ \mu$ m ; $a = 50\ \mu$ m.

a) Calculer le nombre de modes, N_s, dans la fibre à saut d'indice. Arrondir le résultat à l'entier inférieur

b) Calculer le nombre de modes, N_g, dans la fibre à gradient d'indice. Arrondir le résultat à l'entier inférieur.

Exercice 2 : étude d'une fonction *(7 points)*

Lors de la charge d'un condensateur, les variations de la tension à ses bornes peuvent décrites par la fonction f, de la variable temps t, définie sur l'intervalle [0 ; 0,12] par :

$$f : t \rightarrow 12(1 - e^{-50\,t}).$$

Le temps est exprimé en secondes et la tension en volts.

1. Etude des variations de f :
   a) Calculer la fonction dérivée de f, notée f'.
   b) Etudier le signe de f' sur [0 ; 0,12].
   c) Construire le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 ; 0,12].

2. Courbe représentative de f : C_f
   a) Compléter le tableau de valeurs sur l'annexe, en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b) Construire, sur cette même annexe, la représentation graphique C_f sur l'intervalle [0 ; 0,12].
   Le repère choisi a pour unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour 0,01 unité
   en ordonnée, 1 cm pour 1 unité

3. Temps de charge du condensateur
   a) Quelle est, en volts, la tension aux bornes du condensateur complètement chargé ?
   b) Déterminer graphiquement l'instant t_0 auquel le condensateur est chargé à 80 % de la valeur maximale.
   c) Résoudre l'équation $f(t) = 0{,}8 \times 12$.
   En déduire une valeur approchée de t_0 à la milliseconde près.

Exercice 3 : étude d'un signal périodique et de son spectre *(8 points)*

Le polynôme de Fourier d'ordre n d'un signal périodique est donné par :

$$P_n(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \ldots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

Un signal temporel s est périodique, de période T. Le polynôme de Fourier d'ordre 5 associé à ce signal est le suivant :

$$P_s(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(100\,\pi\,t) - \frac{4}{9\pi}\cos(300\,\pi\,t) - \frac{4}{25\pi}\cos(500\,\pi\,t).$$

1. Exploitation du polynôme de Fourier d'ordre 5 : $P_s(t)$
   a) Quel terme représente l'harmonique fondamentale ?
   b) En déduire la pulsation ω, la fréquence f et la période T du signal
   c) Quelle est la composante continue a_0 de ce signal ?
   d) Identifier les coefficients de Fourier : a_k et b_k, pour k variant de 1 à 5

2. Représentation spectrale
   a) Calculer l'amplitude des raies spectrales C_k pour k variant de 1 à 5.
   b) Construire sur l'annexe, la représentation spectrale du signal pour les fréquences comprises dans l'intervalle [0 ; 250 Hz].

O*n rappelle que l'amplitude de la raie d'ordre k est donnée par la relation* $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

3. Energie du spectre E_s
   Calculer l'énergie transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre : E_5
   Donner le résultat avec une précision de 10^{-3}.
   Formule de Parseval : $E_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\,[a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_k^2 + b_k^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2]$

4. Energie du signal E

   Sur une période ce signal est défini par :

   $s(t) = - 100\,\pi\,t$ si $t \in [- 0{,}01 \,;\, 0[$

   $s(t) = + 100\,\pi\,t$ si $t \in [0 \,;\, 0{,}01[$

   Le temps est exprimé en secondes

   L'énergie du signal est donnée par l'intégrale : E = $\dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\,dt$

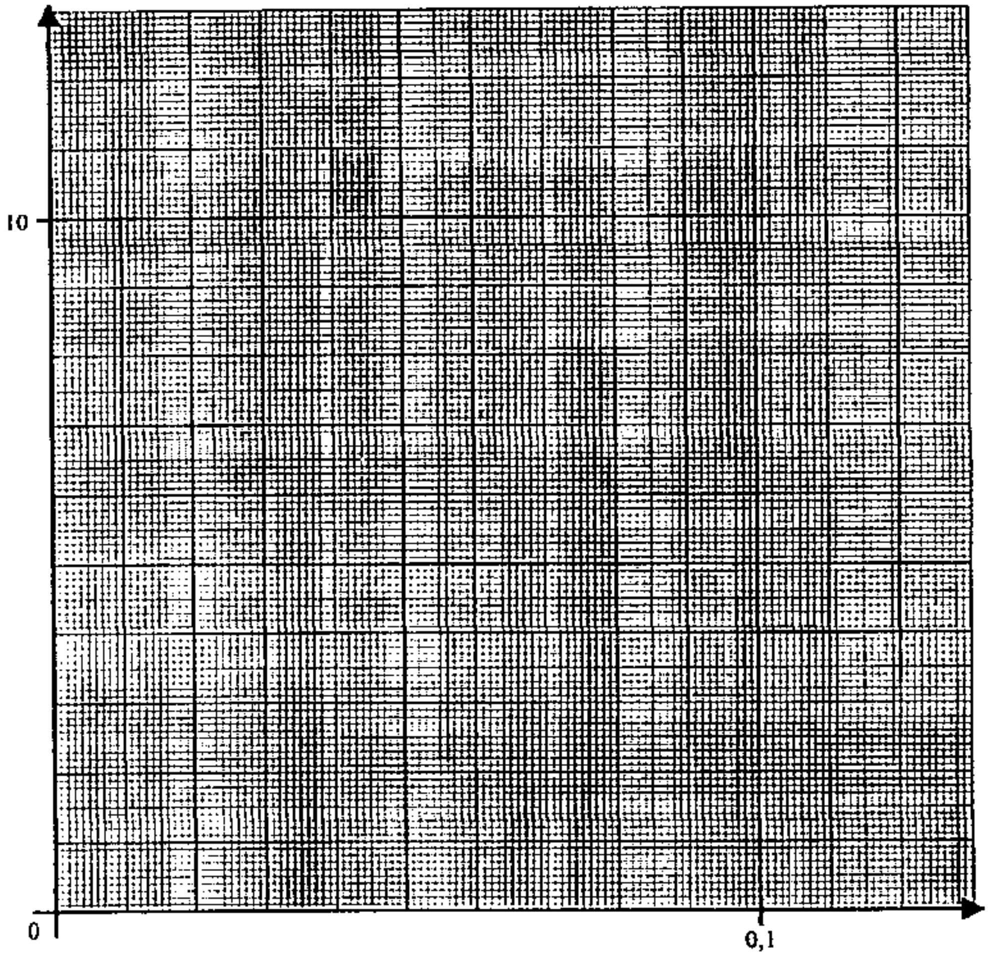
   a) Calculer E et montrer que sa valeur approchée à 10^{-3} près est 3,290 J

   b) Calculer $\dfrac{E_s}{E}$. Quelle est, en pourcentage, l'énergie relative transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre ?

ANNEXE

Exercice 2

t	0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,09	0,12
f(t)										



Exercice 3