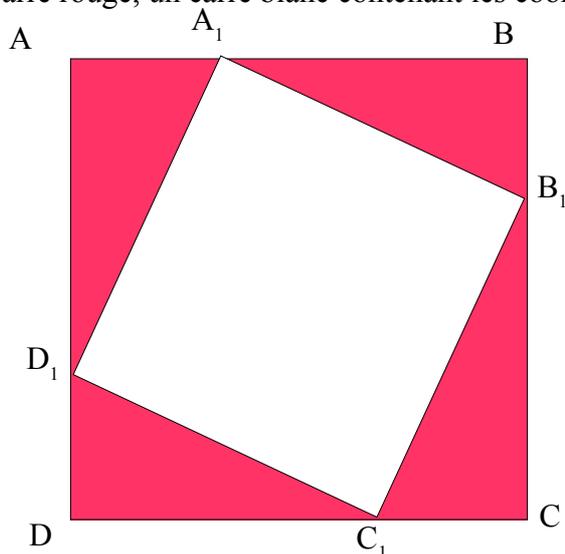


Mathématiques (13 points)

**Exercice 1 :** (7 points)

Un photographe souhaite réaliser un logo pour l'en-tête de ses factures. son projet est le suivant :  
 "A l'intérieur d'un carré rouge, un carré blanc contenant les coordonnées de son magasin".



Le carré rouge ABCD a pour côté 8 cm. Les points  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  et  $D_1$  sont situés respectivement sur les segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ . Les longueurs  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  et  $DD_1$  sont égales. On admet qu'on obtient un carré  $A_1B_1C_1D_1$ .

1 *Etude d'un cas particulier*

Dans cette question, chacune des longueurs  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  et  $DD_1$  sont égales à 2 cm.

1.1 Calculer  $AD_1$

1.2 Calculer  $AD_1^2$  et montrer que le résultat obtenu correspond à l'aire du carré  $A_1B_1C_1D_1$ .

2 *Etude du cas général*

Dans cette question, on note  $x$  la longueur commune, en cm, des segments  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$  et  $[DD_1]$ .

2.1 Calculer  $AD_1$  en fonction de  $x$

2.2 Calculer  $AD_1^2$  en fonction de  $x$  et donner la valeur  $a(x)$  de l'aire du carré  $A_1B_1C_1D_1$ .

3 *Etude de fonction*

Soit la fonction  $f$  de la variable  $x$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 8]$  par  $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$ .

3.1 Déterminer  $f'(x)$  où  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$ .

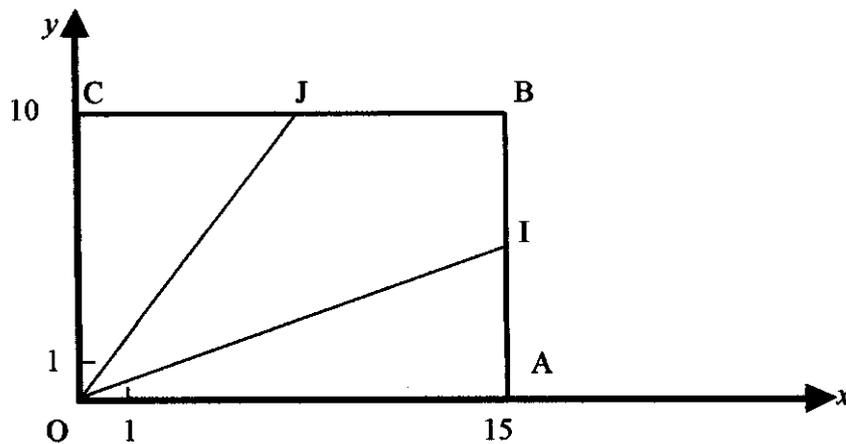
3.2 Résoudre l'équation  $f'(x) = 0$

3.3 Compléter le tableau de variation de l'annexe (à rendre avec la copie).

4 *Interprétation*

- 4.1 Indiquer la valeur de la longueur  $AA_1 = x$  pour laquelle l'aire du carré  $A_1B_1C_1D_1$  est minimale.
- 4.2 Compléter la figure de l'annexe en traçant le carré  $A_1B_1C_1D_1$  pour la valeur de  $x$  indiquée à la question 4.1
- 4.3 Calculer la valeur minimale de l'aire  $a(x)$  du carré  $A_1B_1C_1D_1$ .
- 4.4 A l'aide de la figure tracée à la question 4.2, complétée par les diagonales du carré  $A_1B_1C_1D_1$ , retrouver la valeur obtenue à la question 4.3

**Exercice 2** (6 points)



Le rectangle OCBA ci-dessus représente la scène d'un théâtre vue du dessus.

Les dimensions de la scène sont  $OA = 15$  m et  $OC = 10$  m.

Au point O on place un spot permettant d'éclairer la zone limitée par les segments de droite [OI] et [OJ], où I est le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

Le plan est muni d'un repère orthonormal donné sur la figure, d'origine O et d'unité graphique le centimètre.

1. Ecrire, sans justification, les coordonnées des points I et J.  
On rappelle que ce sont aussi les coordonnées des vecteurs  $\vec{OI}$  et  $\vec{OJ}$ .
2. a. Montrer, en donnant le détail des calculs, que le produit scalaire  $\vec{OI} \cdot \vec{OJ}$  est égal à 162,5.  
b. Calculer la norme  $\|\vec{OI}\| = OI$  du vecteur  $\vec{OI}$ . Arrondir le résultats au centième.  
c. Calculer la norme  $\|\vec{OJ}\| = OJ$  du vecteur  $\vec{OJ}$ .  
d. Dans la suite on prend  $OI = 15,8$  et  $OJ = 12,5$ .  
En utilisant l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs normes, calculer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle  $\widehat{IOJ}$  correspondant à la zone éclairée.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

3.3 Tableau de variation de la fonction  $f$ .

|         |  |
|---------|--|
| $x$     |  |
| $f'(x)$ |  |
| $f(x)$  |  |

4.2

