Résolution d'un système par combinaison linéaire

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Pour résoudre un système par combinaison linéaire de deux équations à deux inconnues (ayant une seule solution $\boxed{ab' - ba' \neq 0}$), on peut chercher à éliminer une des deux inconnues en multipliant par un nombre, puis en additionnant membre à membre les deux équations. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout.

I- Je comprends le cours

Compléter les résolutions de systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ 3x - 4y = -29 \end{cases}$

Critère :
ab' – ba' = **2(-4) – 4 × 3 = -20 ≠ 0**

Donc **un seul couple solution.**

Calcul de x : on « élimine » y en additionnant membre à membre les deux équations ; on conserve comme deuxième équations l'équation « la plus simple ».

$\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ \mathbf{5}\ x = -\mathbf{-15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ x = -\mathbf{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (\mathbf{-3}) + 4y = 14 \\ x = -\mathbf{-3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{-6 + 4y = 14} \\ \mathbf{x = -3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y = 5} \\ \mathbf{x = -3} \end{cases}$

D'où le couple solution (**-3** ; **5**)

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 40 \\ 5x - 7y = 80 \end{cases}$

Critère :
ab' – ba' = **5(-7) – 3 × 5 = -50 ≠ 0**

Donc **un seul couple solution.**

Calcul de y : on « élimine » **x** en additionnant membre à membre les deux équations ; on conserve comme deuxième équations l'équation « la plus simple ».

$\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 40} \\ \mathbf{10y = -40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 40} \\ \mathbf{y = -4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{5x + 3(-4) = 40} \\ \mathbf{y = -4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{5x = 52} \\ \mathbf{y = -4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = \frac{52}{5}} \\ \mathbf{y = -4} \end{cases}$

D'où le couple solution ($\frac{52}{5}$; **-4**)

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 5y = 40 \end{cases}$

Critère :
ab' – ba' = $3 \times 5 - 6(-2) = 27 \neq 0$

Donc **un seul couple solution.**

Calcul de y : On multiplie la première équation par **–2** et on « élimine » x en additionnant les deux équations pour obtenir y :

$\begin{cases} -6x + 4y = -22 \\ 6x + 5y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 9y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2(2) = 11 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

D'où le couple solution (**5** ; **2**)

II-Je travaille seul.

Résoudre :

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$

Critère :
ab' – ba' = $21 \neq 0$

Un seul couple solution.

$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5(1) = 2 \\ -y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = 1 \end{cases}$

D'où le couple solution ($\frac{7}{3}$; **1**)

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$

Critère :
ab' – ba' = $10 \neq 0$

Un seul couple solution.

$\begin{cases} -9x - 6y = -12 \\ -4x + 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ --5x = -15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3) + 2y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2} \\ x = 3 \end{cases}$

D'où le couple solution (**3** ; $-\frac{5}{2}$)

III-Je raisonne.

Un supermarché propose deux types de bouquets :

Lot A : 2 roses, 3 tulipes, 4 iris ; prix 7 euros

Lot B : 5 roses, 4 tulipes, 2 iris ; prix 9 euros.

On a besoin d'exactement 54 roses et 53 tulipes.

Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B à acheter et **calculer** le montant total de l'achat.

- **Soit x le nombre de lots A et y le nombre de lots B.**
- **x lots A donnent :** **- 2x roses**
  - 3x tulipes
  - 4x iris
  -prix : 7x
- **y lots B donnent :** **- 5y roses**
  - 4y tulipes
  - 2y iris
  -prix : 9y
- **Traduisons la contrainte sur le nombre de roses correspondant à x lots A et y lots B :**

$$\boxed{2x + 5y = 54}$$

- **Traduisons la contrainte sur le nombre de tulipes correspondant à x lots A et y lots B :**

$$\boxed{3x + 4y = 53}$$

- **Il reste à résoudre le système :**

$$\begin{cases} 2x + 5y = 54 \\ 3x + 4y = 53 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 15y = 162 \\ -6x - 8y = -106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 54 \\ 7y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5(\,8\,) = 54 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 14 \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$$

Pour avoir exactement 54 roses et 53 tulipes, il faut acheter 7 lots A et 8 lots B.

- **Calcul du prix : 7 lots A à 7 € et 8 lots B à 9€**

$$7 \times 7 + 9 \times 8 = 49 + 56 = 121$$

7 lots A à 7 € et 8 lots B à 9€ donnent un prix de 121 €