

Devoir libre

Objectifs : Valider le calcul algébrique : opérations sur les polynômes, factorisation, développement, identités remarquables

Exercice 1 (concours d'entrée EDF-GDF)

On donne les polynômes (Les réponses sont à mettre sur la feuille.)

$$A = x^3 - 4x^2 - 5x + 1$$

$$B = 2x^3 - x^2 - 4x - 3$$

$$C = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

1) Calculer :

$S = A + B + C$

$$A = \quad x^3 \quad - 4x^2 \quad - 5x \quad + 1$$

$$B = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$C = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Formuler la réponse:

.....

$S_1 = A - B + C$

$$- B = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$- B = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$C = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S_1 = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Formuler la réponse:

.....

$S_2 = A + B - C$

$$- C = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$B = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$- C = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S_2 = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Formuler la réponse:

.....

$S_3 = B + C - A$

$$- A = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$B = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$C = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$- A = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S_3 = \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Formuler la réponse:

.....

2) Comparer S et $S_1 + S_2 + S_3$. On trouve un résultat remarquable. Est-il du au choix des trois polynômes A , B et C ou bien en serait-il de même avec trois polynômes quelconques ? Pourquoi ?

$$\boxed{S_1 + S_2 + S_3}$$

S_1	=
S_2	=
S_3	=
$S_1 + S_2 + S_3$	=

Or

$$S =$$

Conclusion :

.....

Exercice 2 : Effectuer à l'aide des **identités remarquables** :

$$f(x) = (2 + 3x)^2(2 - 3x)^2$$

$$g(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Exercice 3 (**CAP dessinateur_ROUEN 1975**)

Mettre la fonction suivante sous la forme d'un produit de facteurs :

$$f(x) = (2x - 3)(x - 2)^2 - 9(2x - 3)$$

Exercice 4 (**CAP dessinateur en construction_RENNES 1976**)

Soit les polynômes $A(x) = (3x + 1)^2 - (x + 5)^2$ et $B(x) = x^2 - 4x + 4$, dans lesquels x est un nombre réel. Factoriser $A(x)$, $B(x)$ et $A(x) + B(x)$.

Exercice 5 (**BEP conducteur d'appareils des industries chimiques_LYON 1976**)

On définit les applications p et q de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$p(x) = (x - 1)(x - 3) - (3 - x)(7 + x) - x^2 + 9$$

$$q(x) = x^2 + (x - 2)(2x - 6) - 6x + 9$$

- a) Développer $p(x)$ et $q(x)$ et ordonner suivant les puissances décroissantes de x .
- b) Calculer les valeurs numériques de $p(x)$ et $q(x)$ pour $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = 7$.

Corrigé

Exercice 1

On donne les polynômes :

$$A = x^3 - 4x^2 - 5x + 1$$

$$B = 2x^3 - x^2 - 4x - 3$$

$$C = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

1) Calculer :

$$S = A + B + C$$

$$\begin{array}{r} A = \\ B = \\ C = \\ \hline S = \end{array} \begin{array}{r} x^3 \\ 2x^3 \\ x^3 \\ 4x^3 \end{array} \begin{array}{r} -4x^2 \\ -x^2 \\ -x^2 \\ -6x^2 \end{array} \begin{array}{r} -5x \\ -4x \\ -5x \\ -14x \end{array} \begin{array}{r} +1 \\ -3 \\ +2 \\ 0 \end{array}$$

Formuler la réponse:

Le polynôme S est

$$S_1 = A - B + C$$

$$S = 4x^3 - 6x^2 - 14x$$

$$-B = -2x^3 + x^2 + 4x + 3$$

$$\begin{array}{r} A = \\ -B = \\ C = \\ \hline S_1 = \end{array} \begin{array}{r} x^3 \\ -2x^3 \\ x^3 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} -4x^2 \\ +x^2 \\ -x^2 \\ -4x^2 \end{array} \begin{array}{r} -5x \\ +4x \\ -5x \\ -6x \end{array} \begin{array}{r} +1 \\ +3 \\ +2 \\ +6 \end{array}$$

Formuler la réponse:

Le polynôme S₁ est

$$S_2 = A + B - C$$

$$S_1 = -4x^2 - 6x + 6$$

$$-C = -x^3 + x^2 + 5x - 2$$

$$\begin{array}{r} A = \\ B = \\ -C = \\ \hline S_2 = \end{array} \begin{array}{r} x^3 \\ 2x^3 \\ -x^3 \\ 2x^3 \end{array} \begin{array}{r} -4x^2 \\ -x^2 \\ +x^2 \\ -4x^2 \end{array} \begin{array}{r} -5x \\ -4x \\ +5x \\ -4x \end{array} \begin{array}{r} +1 \\ -3 \\ -2 \\ -4 \end{array}$$

Formuler la réponse:

Le polynôme S₂ est

$$S_3 = B + C - A$$

$$S_2 = 2x^3 - 4x^2 - 4x - 4$$

$$-A = -x^3 + 4x^2 + 5x - 1$$

$$\begin{array}{r} B = \\ C = \\ -A = \\ \hline S_3 = \end{array} \begin{array}{r} 2x^3 \\ x^3 \\ -x^3 \\ 2x^3 \end{array} \begin{array}{r} -x^2 \\ -x^2 \\ +4x^2 \\ 2x^2 \end{array} \begin{array}{r} -4x \\ -5x \\ +5x \\ -4x \end{array} \begin{array}{r} -3 \\ +2 \\ -1 \\ -2 \end{array}$$

Formuler la réponse:

Le polynôme S₃ est

$$S_3 = 2x^3 + 2x^2 - 4x - 2$$

2) Comparer S et S₁ + S₂ + S₃. On trouve un résultat remarquable. Est-il du au choix des trois polynômes A, B et C ou bien en serait-il de même avec trois polynômes quelconques ? Pourquoi ?

$$S_1 + S_2 + S_3$$

$$\begin{array}{r} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \hline S_1 + S_2 + S_3 \\ \text{Or} \\ S = \end{array} \begin{array}{r} A \\ A \\ -A \\ A \\ A \end{array} \begin{array}{r} -B \\ +B \\ +B \\ +B \\ +B \end{array} \begin{array}{r} +C \\ -C \\ +C \\ +C \\ +C \end{array}$$

Conclusion :

S = S₁ + S₂ + S₃ et S₁ + S₂ + S₃ = A + B + C, quelque soit les polynômes A, B et C

Exercice 2 : Effectuer à l'aide des identités remarquables :

$$f(x) = (2 + 3x)^2 (2 - 3x)^2$$

$$g(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= [(2 + 3x)(2 - 3x)]^2$$

$$\text{car } a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$= \left[\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

$$= [(2)^2 - (3x)^2]^2$$

$$\text{car } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$= \left[\left(\frac{4}{5}x \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^2$$

$$= (4 - 9x^2)^2$$

$$= \left(\frac{16}{25}x^2 - \frac{1}{4} \right)^2$$

$$= 16 - 2 \times 4 \times 9x^2 + (9x^2)^2$$

$$\text{car } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= \left(\frac{16}{25}x^2 \right)^2 - 2 \times \frac{16}{25}x^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$= 16 - 72x^2 + 81x^4$$

$$g(x) = \frac{256}{625}x^4 - \frac{8}{25}x^2 + \frac{1}{16}$$

$$f(x) = 81x^4 - 72x^2 + 16$$

Exercice 3 (CAP dessinateur_ROUEN 1975)

Mettre la fonction suivante sous la forme d'un produit de facteurs :

$$f(x) = (2x - 3)(x - 2)^2 - 9(2x - 3)$$

$$f(x) = (2x - 3)(x - 2)^2 - 9(2x - 3)$$

mise en évidence d'un facteur commun

$$= (2x - 3)[(x - 2)^2 - 9]$$

mise en évidence d'une identité remarquable

$$= (2x - 3)[(x - 2) - 3][(x - 2) + 3]$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= (2x - 3)(x - 2 - 3)(x - 2 + 3)$$

$$f(x) = (2x - 3)(x - 5)(x + 1)$$

Exercice 4 (CAP dessinateur en construction_RENNES 1976)

Soit les polynômes $A(x) = (3x + 1)^2 - (x + 5)^2$ et $B(x) = x^2 - 4x + 4$, dans lesquels x est un nombre réel. Factoriser $A(x)$, $B(x)$ et $A(x) + B(x)$.

$$A(x) = (3x + 1)^2 - (x + 5)^2$$

$$= [(3x + 1) - (x + 5)][(3x + 1) + (x + 5)]$$

mise en évidence de l'identité remarquable $a^2 - b^2$

$$= (3x + 1 - x - 5)(3x + 1 + x + 5)$$

$$= (2x - 4)(4x + 6)$$

$$= [2 \times (x - 2)][2 \times (2x + 3)]$$

mise en évidence d'un facteur commun

$$= 2 \times 2 \times (x - 2)(2x + 3)$$

$$A(x) = 4(x - 2)(2x + 3)$$

$$B(x) = x^2 - 4x + 4$$

mise en évidence de l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$

$$B(x) = (x - 2)^2$$

$$A(x) + B(x) = 4(x - 2)(2x + 3) + (x - 2)^2$$

mise en évidence d'un facteur commun

$$= (x - 2)[4(2x + 3) + (x - 2)]$$

$$= (x - 2)(8x + 12 + x - 2)$$

$$A(x) + B(x) = (x - 2)(9x + 10)$$

Exercice 5 (BEP conducteur d'appareils des industries chimiques_LYON 1976)

a) Développer $p(x)$ et $q(x)$ et ordonner suivant les puissances décroissantes de x .

$$p(x) = (x - 1)(x - 3) - (3 - x)(7 + x) - x^2 + 9$$

$$q(x) = x^2 + (x - 2)(2x - 6) - 6x + 9$$

$$= x^2 - 3x - x + 3 - (21 + 3x - 7x - x^2) - x^2 + 9$$

$$= x^2 + 2x^2 - 6x - 4x + 12 - 6x + 9$$

$$= x^2 - 3x - x + 3 - 21 - 3x + 7x + x^2 - x^2 + 9$$

$$q(x) = 3x^2 - 16x + 21$$

$$p(x) = x^2 - 9$$

b) Calculer les valeurs numériques de $p(x)$ et $q(x)$ pour $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = 7$.

$$p(0) = (0)^2 - 9$$

$$p(0) = -9$$

$$p(7) = (7)^2 - 9$$

$$= 49 - 9$$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{1}{2}\right) + 21$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9$$

$$p(7) = -40$$

$$q(0) = 3(0)^2 - 16(0) + 21$$

$$= 3 \times \frac{1}{4} - 16 \times \frac{1}{2} + 21$$

$$= \frac{1}{4} - 9$$

$$q(0) = 21$$

$$q(7) = 3(7)^2 - 16(7) + 21$$

$$= \frac{3}{4} - 8 + 21$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{35}{4}$$

$$q(7) = 56$$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{55}{4}$$

