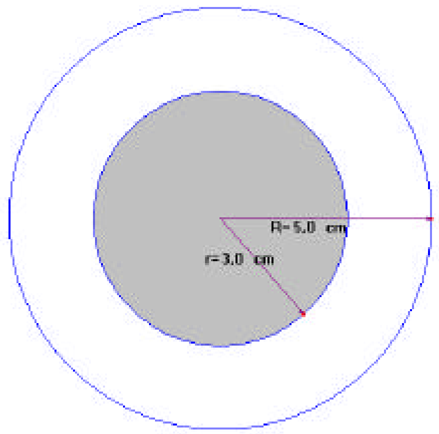
Polynômes – identités remarquables

Transformer une somme de monômes en un produit **c'est factoriser**

Activités n°1

A ire de la couronne circulaire



On rappelle : Aire du cercle = πR^2

Effectuer les calculs suivants.

Aire du grand cercle	πR^2	$\pi \times 5 \times 5$	**78,54**
Aire du petit cercle	πr^2	$\pi \times 3 \times 3$	**28,27**
Aire de la couronne	$\pi R^2 - \pi r^2$	$16 \times \pi$	**50,27**

Puis calculer :

$R^2 = \mathbf{25}$ $\quad r^2 = \mathbf{9}$ $\quad R^2 - r^2 = \mathbf{16}$ $\quad \pi(R^2 - r^2) = \mathbf{16\pi = 50{,}27}$

Que remarque-t-on ?: *faire une phrase dans un français correct*

On remarque que l'aire de la couronne $\pi R^2 - \pi r^2$ est égale à $\pi(R^2 - r^2)$

Conclusion : $\boxed{\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)}$

Activités n°2

On se propose d'écrire les polynômes suivants sous forme d'un produit de facteurs.

Dans les polynômes suivants, souligner le facteur commun.

$P_1(x) = 3\underline{a}x + 5\underline{a}y + 2\underline{a}$

NOTE!!!!!
$3ax = 3 \times a \times x$
$5ay = 5 \times a \times y$
$2a = 2 \times a$

$P_2(x) = 3(\underline{x-2}) + 7(\underline{x-2})(x-3) + 2(\underline{x-2})$

Ecrire ensuite les polynômes sous forme d'un produit de facteurs.

$P_1(x) = 3\underline{a}x + 5\underline{a}y + 2\underline{a} = a(3x + 5y + 2)$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 3(\underline{x-2}) + 7(\underline{x-2})(x-3) + 2(\underline{x-2}) \\ &= (x-2)[3 + 7(x-3) + 2] \\ &= (x-2)(7x-16) \end{aligned}$$

Que dois-je retenir pour factoriser une expression ?:

Il faut rechercher un facteur commun

Transformer les polynômes suivants de façon à faire apparaître un facteur commun, puis factoriser.

Méthodologie !
Encadrer ou souligner le résultat à la règle

$P_3(x) = 3ax^2 + 6x$

$= \underline{3} \times a \times \underline{x} \times x + 2 \times \underline{3} \times \underline{x}$

$= 3x(\ ax + 2\ )$

$P_4(x) = 9a^2x^3 + 6ax^2$

$= \underline{3} \times 3 \times \underline{a} \times a \times \underline{x} \times \underline{x} \times x + 2 \times \underline{3} \times \underline{a} \times \underline{x} \times \underline{x}$

$= 3ax^2(\ 3x + 2\ )$

$\boxed{9a^2x^3 = 3 \times 3 \times a \times a \times x \times x \times x}$

$\boxed{6ax^2 = 2 \times 3 \times a \times x \times x}$

$P_5(x) = 5(\ \underline{x + 1}\ )^2 - (\ x - 1\ )(\ \underline{x + 1}\ ) + (\ \underline{x + 1}\ )$

$= (\ x + 1\ )[\ 5(\ x + 1\ ) - (\ x - 1\ ) + 1\ ]$

$= (\ x + 1\ )[\ 5x + 5 - x + 1 + 1\ ]$

$= (\ x + 1\ )(4x + 7\ )$

Activités n°3

Factoriser en utilisant les identités remarquables.

Rappel :

Pour développer	Pour factoriser
$(\ a + b\ )^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (\ a + b\ )^2$
$(\ a - b\ )^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (\ a - b\ )^2$
$(\ a + b\ )(\ a - b\ ) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (\ a + b\ )(\ a - b\ )$

Mettre sous forme d'un carré.

$a^2 + 2ab + b^2 = (\ a + b\ )^2$	$9t^2 + 6t + 1 = (\ 3t + 1\ )^2$
$x^2 + 8x + 16 = (\ a + b\ )^2$	$9x^2 + 6\sqrt{2}x + 2 = (\ 3x + \sqrt{2}\ )^2$
$u^2 + 25 + 10u = u^2 + 10u + 25 = (\ u + 5\ )^2$	$z^2 + \frac{1}{4} + z = z^2 + z + \frac{1}{4} = (\ z + \frac{1}{2}\ )^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (\ a - b\ )^2$	$x^2 - 14x + 49 = (\ x - 7\ )^2$
$25x^2 - 10x + 1 = (\ 5x - 1\ )^2$	$16x^2 + 49 - 56x = 16x^2 - 56x + 49 = (\ 4x - 7\ )^2$
$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = (\frac{1}{2}x - 3\ )^2$	$\frac{9}{16}x^2 - \frac{15}{14}x + \frac{25}{49} = (\ \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}\ )^2$

Mettre sous forme du produit d'une somme de deux termes par leur différence.

$a^2 - b^2 = (\ a + b\ )(\ a - b\ )$

$36x^2 - 25 = (\ 6x + 5\ )(\ 6x - 5\ )$

$9a^2 - 1 = (3a + 1)(3a - 1)$

$49a^2b^4 - 16a^4b^2 = (7ab^2)^2 - (4a^2b)$

$= (7ab^2 + 4a^2b)(7ab^2 - 4a^2b)$

$1 - 100x^2 = (1 + 10x)(1 - 10x)$

$(2x - 7)^2 - 4 = [(2x - 7) - 2][(2x - 7) + 2]$

$= (2x - 7 - 2)(2x - 7 + 2)$

$= (2x - 9)(2x - 5)$

$(3 - 5x)^2 - (x + 2)^2$

$= [(3 - 5x) - (x + 2)][(3 - 5x) + (x + 2)]$

$= [3 - 5x - x - 2][3 - 5x + x + 2]$

$= (-6x + 1)(-4x + 5)$

$(2x - 1)^2 - 4(x + 2)^2$

$= [(2x - 1) - 2(x + 2)][(2x - 1) + 2(x + 2)]$

$= [2x - 1 - 2x - 4][2x - 1 + 2x + 4]$

$= -5(4x + 3)$

Activités n°4

Utilisation de la factorisation pour simplifier les fractions.

$f_1(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x}$

1 On prouve l'existence de la fonction en recherchant les valeurs « interdites »

$f_1(x)$ existe si et seulement si son dénominateur est différent de zéro :

$\mathbf{x^2 - 4x} \neq 0$

Si $\mathbf{x(x - 4)} \neq 0$

Si $\mathbf{x} \neq 0$ ou $\mathbf{x - 4} \neq 0$

Les valeurs interdites sont **0** et **4.**

2 On écrit le numérateur sous forme d'un produit de facteurs (si c'est possible)

$\mathbf{x^2 + 3x = x(x + 3)}$

3 On écrit le dénominateur sous forme d'un produit de facteurs (si c'est possible)

$\mathbf{x^2 - 4x = x(x - 4)}$

4 On écrit la fraction en remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs formes factorisées.

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x} = \frac{\mathbf{x(x + 3)}}{\mathbf{x(x - 4)}}$$

5 On divise le numérateur et le dénominateur par leurs facteurs communs.

$$f_1(x) = \frac{\mathbf{x + 3}}{\mathbf{x - 4}}$$

$f_2(x) = \dfrac{3a^3 - 3a^2b}{6a^2}$

1 On prouve l'existence de la fonction en recherchant les valeurs « interdites »

$f_2(x)$ existe si et seulement si son dénominateur est différent de zéro :

Si $6a^2 \neq 0$

$a \neq 0$

La valeur interdite est **0**

2 On écrit le numérateur sous forme d'un produit de facteurs (si c'est possible)

$$\mathbf{3a^3 - 3a^2b = 3a^2(a - b)}$$

3 On écrit le dénominateur sous forme d'un produit de facteurs (si c'est possible)

$$\mathbf{6a^2 = 3a^2 \times 2}$$

4 On écrit la fraction en remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs formes factorisées.

$$f_2(x) = \frac{3a^3 - 3a^2b}{6a^2} = \frac{\mathbf{3a^2(a - b)}}{\mathbf{3a^2 \times 2}}$$

5 On divise le numérateur et le dénominateur par leurs facteurs communs.

$$f_2(x) = \frac{\mathbf{a - b}}{\mathbf{2}}$$

Activités n°5

x étant un nombre réel, on considère l'expression :

$$A = 9 - x^2 + (x + 3)(4x + 5) - 2(x + 3)^2$$

1- Développer et réduire A

$$\begin{aligned} A &= 9 - x^2 + (x + 3)(4x + 5) - 2(x + 3)^2 \\ &= 9 - x^2 + 4x^2 + 5x + 12x + 15 - 2(x^2 + 6x + 9) \\ &= 9 - x^2 + 4x^2 + 5x + 12x + 15 - 2x^2 - 12x - 18 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = x^2 + 5x + 6}$$

2-Factoriser A.

$$\begin{aligned} A &= 9 - x^2 + (x + 3)(4x + 5) - 2(x + 3)^2 \\ &= (3 - x)(\underline{3 + x}) + (\underline{x + 3})(4x + 5) - 2(\underline{x + 3})^2 \\ &= (3 + x)[(3 - x) + (4x + 5) - 2(x + 3)] \\ &= (3 + x)[3 - x + 4x + 5 - 2x - 6] \end{aligned}$$

$$\boxed{A = (3 + x)(x + 2)}$$