PROPORTIONNALITES ET POURCENTAGES

I-La proportionnalité

1-Activité préparatoire n°1: *Suites de nombres proportionnelles*

1-l'indication « 0,88 €/L » permet de calculer les prix manquants dans le tableau ci-dessous. **Indiquer** l'opération à effectuer et **compléter** la ligne de prix.

× 0,88 ; × 1,14

Volume V (L)	1	2	……**3**……	5	….**6** …	10
Prix P (€)	..**0,88**.	..**1,76**..	2,64	..**4,4**..	5,28	**8,8**

Il faut multiplier la première ligne par 0,88.

2-**Quelles opérations permettent de calculer les volumes manquants ?**

Il faut diviser la seconde ligne par 0,88 ou multiplier par l'inverse de 0,88 ($\frac{25}{22}$).

3-**Compléter** la ligne des volumes.

4-Les deux suites de nombres obtenus sont proportionnelles. **Quel est le coefficient multiplicateur de la suite 1 (1ère ligne) vers la suite 2 (2ième ligne) ?**

Le coefficient multiplicateur de la suite 1 (1ère ligne) vers la suite 2 (2ième ligne) est 0,88.

5-Indiquer la valeur exacte du coefficient multiplicateur de la deuxième suite vers la première.

$$\frac{1}{0,88} = \frac{1}{\frac{88}{100}} = \frac{100}{88} = \frac{25}{22}$$

6-Quelle est la relation entre les deux coefficients multiplicateurs définis à partir de deux suites de nombres proportionnelles ?

$$\frac{100}{88} \times \frac{100}{88} = \mathbf{1}$$

7-Les volumes en litres et les prix en euros sont-ils des grandeurs proportionnelles ? Justifier.

Oui, ces deux grandeurs sont proportionnelles car :

$$\frac{1}{0,88} = \frac{2}{1,76} = \frac{3}{2,64} = \frac{5}{4,4} = \frac{6}{5,28} = \frac{10}{8,8} = \mathbf{1,14 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$$

2-Ceque je retiens.

a-définition.

(x_1 , x_2 , x_3 , …) et (y_1 , y_2 , y_3 , …) sont deux suites proportionnelles s'il existe un nombre k non nul tel que :

$$\boxed{\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k}$$

- **k est le coefficient de proportionnalité (ou coefficient multiplicateur) de la première suite vers la seconde.**
- **$\frac{1}{k}$ est le coefficient de proportionnalité de la deuxième suite vers la première.**

- **Les deux coefficients sont inverses l'un de l'autre : $k \times \frac{1}{k} = 1$**
- **On schématise également la situation de la manière suivante :**

$\times k$							$\times \frac{1}{k}$
	x_1	x_2	x_3			x_n	
	y_1	y_2	y_3			y_n	

b-J'applique.

Exercice n°1

Les suites de nombres A = { 0,18 ; 0,93 ;1,5 } et B = { 0,6 ; 3,1 ; 5 } sont-elles proportionnelles ?

Calculs :	Formulation de la réponse :
$\frac{0,18}{0,6} = \mathbf{0,3}$ $\frac{0,93}{3,1} = \mathbf{0,3}$ $\frac{1,5}{5} = \mathbf{0,3}$	**Les rapports des termes de la 1ère suite par les termes de la 2ième suite sont tous égaux ; les deux suites sont donc proportionnelles et le coefficient de proportionnalité de la 2ère suite vers la 2ième suite est 0,3.**

Exercice n°2

Déterminer x pour que les deux suites de nombres soient proportionnelles.

X = { 2,2 ; 5 } et Y = { 0,33 ; x }

Calculs :	Formulation de la réponse :
	…………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………

Exercice n°3

Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

2,1	3	6,3	9	12	$\times$…
…….	…….	…….	3	…….	

3- je complète seul(e) ;

Je sais reconnaître une tableau de proportionnalité	Oui	☐	Non	☐
Je sais reconnaître deux suites de nombres proportionnelles	Oui	☐	Non	☐
A chaque situation de proportionnalité, je fais référence à la définition.	Oui	☐	Non	☐
Je sais utiliser la quatrième proportionnelle	Oui	☐	Non	☐

Je note les mots que j'ai retenu :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4- Effectuer un partage proportionnel.

a- Etude d'un exemple.

On désire partager une somme de 6000 € entre trois personnes A, B et C proportionnellement aux nombres 2, 3 et 5.

- J'appelle x la part de la personne A, y celle de la personne B et z celle de C.
- Je traduis la situation dans un tableau :

personnes	A	B	C	
nombre	2	3	5	2 + 3 + 5
Parts de chaque personne	x	y	z	z + y + z

- Je traduis la proportionnalité :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

- Je détermine le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5}$$

avec x + y + z = 6000 €

- Je calcule chaque part :

Part de la personne A : $\frac{x}{2} = \frac{6000}{10}$ soit x = 1200 €

Part de la personne B : $\frac{y}{3} = \frac{6000}{10}$ soit y = 1800 €

Part de la personne C : $\frac{z}{5} = \frac{6000}{10}$ soit z = 3000 €

- Je vérifie mes résultat :

Part(A) + part(B) = part(C) = 1200 + 1800 + 3000 = 6000€

- Je formule la réponse :

La personne A reçoit 1200 €, la personne B reçoit 1800 e et la personne C reçoit 3000 €.

b- Définition

Partager un nombre S en parts proportionnelles aux nombres a, b, c, … revient à chercher les nombre x, y, z, …, de somme S et proportionnels aux nombres a, b, c, …

Cela se traduit par l'égalité suivante :

$$\boxed{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z + \dots}{a + b + c + \dots} \text{ avec } S = x + y + z + \dots}$$

c- appliquer.

On partage une prime entre quatre employés, proportionnellement à leur ancienneté, respectivement de 6, 2, 4 et 8 ans. Le premier reçoit 41 €. Calculer la part des trois autres.

Employés	A	B	C	D	Total
Anciennetés	……..	……..	……..	……..	……..
Primes (en €)	……..	……..	……..	……..	……..

×

…….

5-Reconnaître la proportionnalité de deux grandeurs graphiquement.

a- activité préparatoire n°2.

Soit le repère orthogonal du plan. On veut placer les points dont les coordonnées sont les couples de valeurs (V ; P) du tableau précédent de l'activité préparatoire n°1 (I1)

1-Indiquer les grandeurs à porter sur les axes.

Les grandeurs à porter sur les axes sont le volume V en Litres sur l'axe des abscisses et le pris P en euros sur l'axe des ordonnées.

2-Placer les points.

3-Comment les points semblent-ils situés ?Effectuer un tracé en pointillés.

Les points sont tous alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

4-Etablir la relation entre P et V.

$$\boxed{P = 0,88 \times V}$$

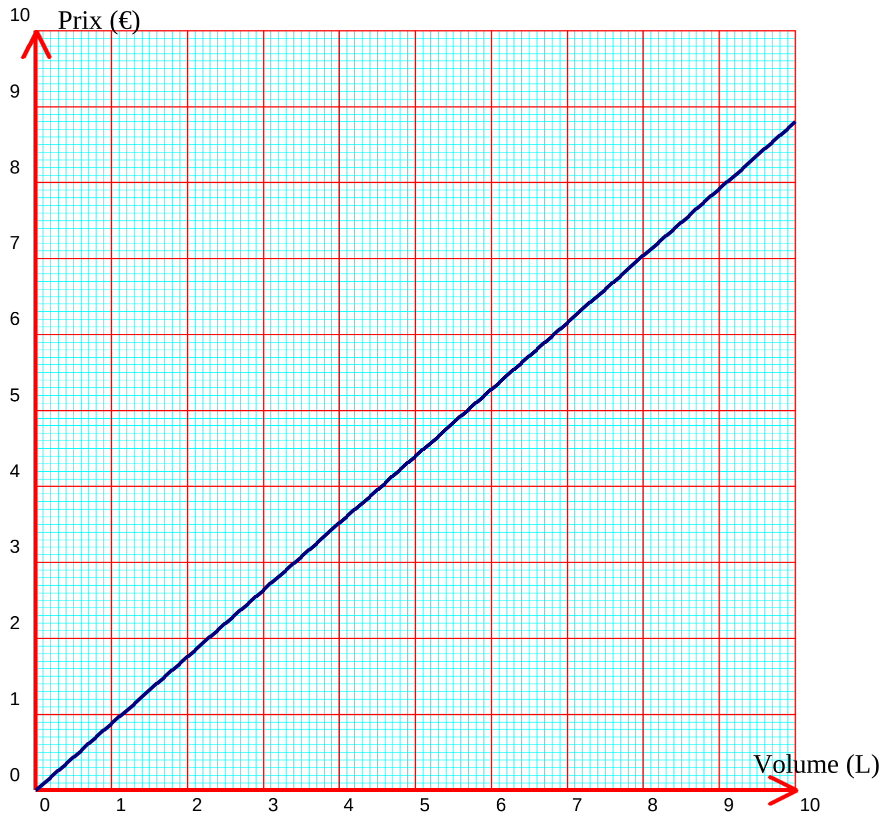
5-Soit la fonction f définie sur [0 ; 10] par f(V) = 0,88 V.

Quelle est la nature de cette fonction ? Quelle est sa représentation graphique dans le repère ?

La fonction est de la forme $x \longrightarrow a \times x$. C'est donc une fonction linéaire. Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

6-Peut-on confirmer l'hypothèse graphique de la question 3 ?

Oui, car P = 0,88 × V. C'est l'expression de la fonction linéaire qui à V associe 0,88 × V. Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.



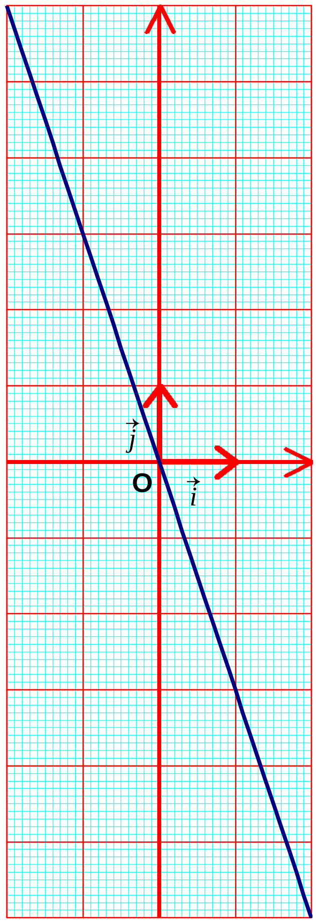
b-méthode

Dans un repère, on place les points de coordonnées (x ; y). Ils doivent être alignés avec l'origine du repère.

II- Fonction Linéaire et Proportionnalité

1-définition.

Etant donné un nombre a, on appelle fonction linéaire la fonction f qui à tout nombre x fait correspondre le nombre ax. ($a \times x$)



2-Exemple.

Considérons la fonction f définie f(x) = -3x. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)	**…6…..**	**……3…**	**……0…**	**…-3…**	**…-6…**

$\times$ a = -3

4-conclusion

Les valeurs de y = f(x) sont **proportionnelles** aux valeurs de x. Ainsi, les **fonctions linéaires** sont **les fonctions associées aux situations de proportionnalité**.

5-Courbe représentative.

Théorème :

- La courbe représentative d'une fonction linéaire est **une droite passant par l'origine** du repère.
- Si la courbe représentative d'une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) est une droite passant par l'origine, alors la fonction f est **linéaire.**

III-Application aux pourcentages

1-Mise en situation.

Le 20 juin 1997, fête de la musique la FNAC annonce :

*« **Un taux de TVA à 5,5% sur toute la musique** » et précise que cela correspond à une remise de 12,52%.*

Etudions cette situation dans deux cas, colonne 1 et 2, compte tenu du fait que le taux de TVA pratiqué habituellement est de 20,6%.

Le prix hors taxe d'un CD est :

Colonne 1	**Colonne 2**
15,24 €	**x (F)**

1-Calculer le montant normal de la TVA.

$15{,}24 \times \frac{20{,}6}{100} \approx 3{,}14$ €	$x \times \frac{20{,}6}{100} = 0{,}206\,x$

2-Calculer le prix du disque TVA comprise :

$15{,}24 + 3{,}14 \approx 18{,}38$ €	$x + 0{,}206\,x = 1{,}206\,x$

3-Calculer le montant de la TVA le jour de la fête de la musique.

$15{,}24 \times \frac{5{,}5}{100} \approx 0{,}84$ €	$x \times \frac{5{,}5}{100} = 0{,}055\,x$

4-Calculer le prix du disque TVA comprise le jour de la fête de la musique.

$15{,}24 + 0{,}84 \approx 16{,}08$ €	$x + 0{,}055\,x = 1{,}055\,x$

5-Calculer le montant de la remise effectuée à la caisse.

18,38 – 16,08 = 2,3

1,206 x - 1,055 x = 0,151 x

6-Calculer le taux de remise par rapport au prix normal du CD, TVA incluse.

$$\frac{2,3}{18,38} \times \mathbf{100 = 12,51\ \%}$$

$$\frac{0,151x}{1,206x} \times \mathbf{100 = 12,52\ \%}$$

7-Quel que soit le prix du disque CD, l'opération promotionnelle correspond à un taux de :

12,52 %

2-Définitions.

Il existe trois situations de base :

Situation	**Coefficient correspondant**	**Fonction linéaire associée**
Prendre t% d'un nombre	C'est multiplier x par $\frac{t}{100}$	$x \longmapsto \frac{t}{100}x$
Augmenter x de t%	C'est multiplier x par $(1 + \frac{t}{100})$	$x \longmapsto (1 + \frac{t}{100})x$
Diminuer x de t%	C'est multiplier x par $(1 - \frac{t}{100})$	$x \longmapsto (1 - \frac{t}{100})x$

Exemples :

- 12% de x, c’est 0,12 x

- Si x augmente de 12%, x devient 1,12 x.
- Si x diminue de 12%, x devient 0,88x