RESOLUTION D'UNE EQUATION DU SECOND DEGRE

<u>Objectif :</u>

Résoudre une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec ($a \neq 0$ et $c \neq 0$)

<u>Activités préparatoire :</u> *Les cas les plus simples*

1- Résolution graphique de l'équation : $-0{,}8x^2 = -7{,}2$

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] par $f(x) = -0{,}8\,x^2$ et g définie par $g(x) = -7{,}2$.

1- Etude de la fonction f.

a) Quelle est la nature de la fonction f. Quelle propriété particulière possède-t-elle ?

f est une fonction carrée dont l'expression générale est $f(x) = ax^2$ avec $a = -0{,}8 < 0$. La fonction f est une fonction paire ; sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) En déduire le tableau de variations de f.

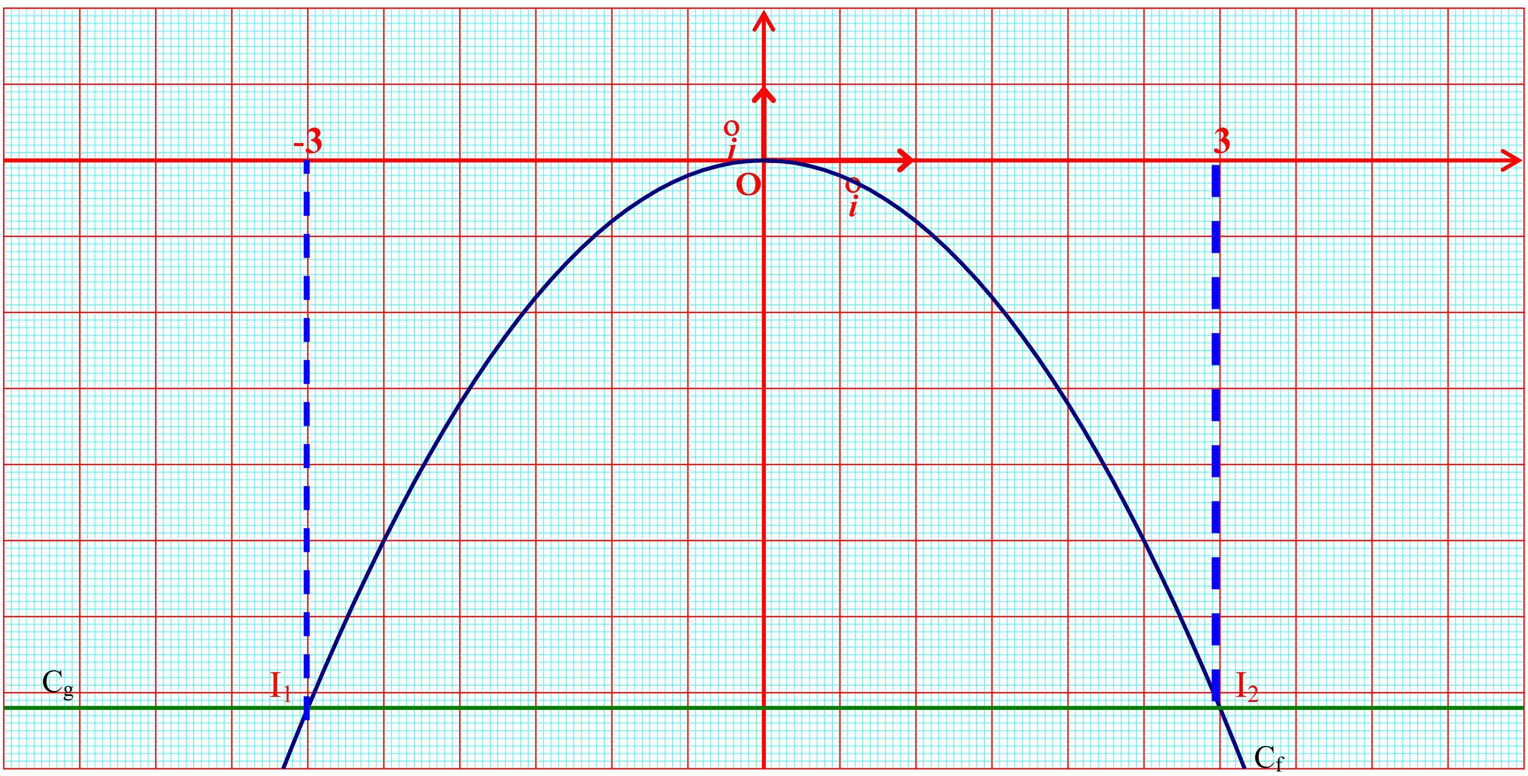
x	-5		0		5
f(x)	-16	↗	0	↘	-16

c) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	**0**	**-0,2**	**-0,8**	**-1,8**	**-3,2**	**-5**	**-5,8**	**-9,8**

d) Construire la courbe C_f dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. Quel nom porte cette courbe ?

La courbe obtenue est une parabole.



2- Etude de la fonction g.

a) Quelle particularité présente cette fonction ? Quel nom lui donne-t-on ?

Quelque soit la valeur de x, la fonction garde la même valeur (-7,2). g est une fonction constante.

b) Quel nom donne-t-on à sa représentation graphique ? Quelle particularité présent-t-elle ?

La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

c) Tracer la représentation graphique C_g de la fonction g dans le repère précédent.

3- Résolution de l'équation.

a) Noter I_1 et I_2 les deux points d'intersection des courbes C_f et C_g.

b) Quelles sont les abscisses de ces deux points ?

I_1 a pour abscisse $x_{I1} = -3$ et I_2 a pour abscisse $x_{I2} = 3$.

c) Aux approximations près, les abscisses de I_1 et I_2 sont-elles solutions de l'équation : $-0{,}8x^2 = -7{,}2$.

Pour I_1 :

$-\ 0{,}8 \times (-3)^2 = 7{,}2$

Pour I_2 :

$-\ -0{,}8 \times (3)^2 = 7{,}2$

Ces abscisses sont solutions de l'équation.

4- J'analyse ma démarche.

1- Je considère les deux membres de l'équation : $-0{,}8x^2 = -7{,}2$.

1^{er} membre	$2^{ième}$ membre
$-0{,}8\ x^2$	**$-7{,}2$**

2- Je donne un nom à chacune des fonctions isolées :

$-0{,}8\ x^2$	**$-7{,}2$**
f(x)	**g(x)**

3- J'étudie chacune des deux fonctions. (en recherchant la nature de la fonction, son tableau de variations, sa représentation graphique …)

1^{er} membre

f(x) = $-0{,}8\ x^2$

Fonction carrée paire sur I

x	-5		0		5
f(x)	-16	↗	0	↘	-16

Représentation graphique :

parabole

$2^{ième}$ membre

g(x) = $-7{,}2$

Fonction constante

x	-5		5
g(x)	-7,2	→	-7,2

Représentation graphique :

Droite parallèle à l'axe des abscisses

4- Je recherche graphiquement les points d'intersection.

Il y a **deux** points d'intersection I_1 et I_2. L'équation admet donc **deux** solutions qui sont les **abscisses** des **points d'intersection** des deux courbes.

2- Résolution graphique de l'équation : $0,5x^2 + x - 2 = 0$

Soit la fonction f définie par $f(x) = 0,5x^2$ et g par $g(x) = -x + 2$.

1- Etude de la fonction f.

a) Quelle est la nature de la fonction f. Quelle propriété particulière possède-t-elle ?

f est une fonction carrée dont l'expression générale est $f(x) = ax^2$ avec $a = 0,5 > 0$. La fonction f est une fonction paire ; sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

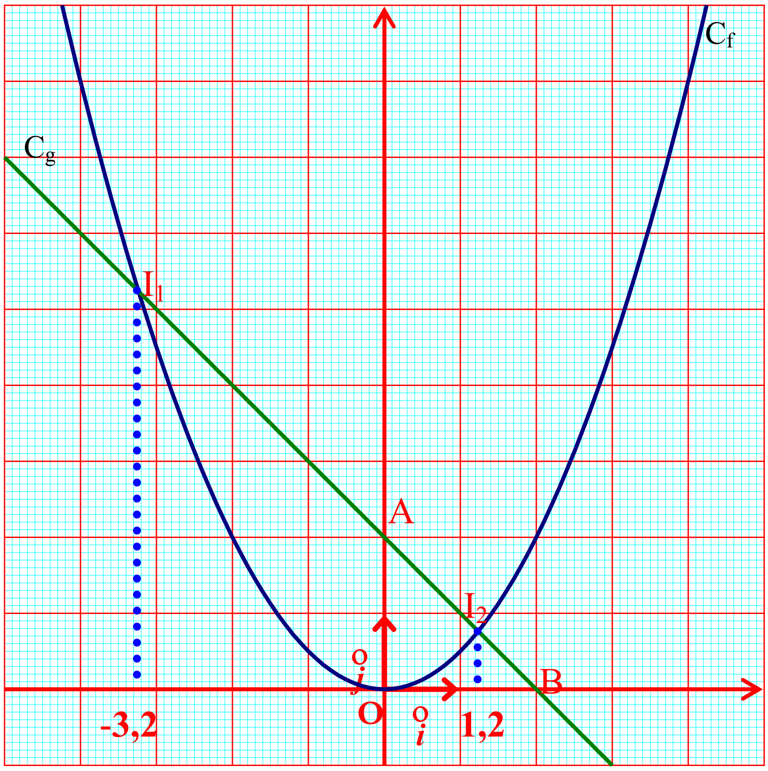
b) En déduire le tableau de variations de f.

x	-5	0	5
f(x)	6,25 ↘	0	↗ 6,25

c) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
f(x)	**0**	**0,1**	**0,5**	**1,1**	**2**	**3,1**	**4,5**	**6,1**	**8**	**10,1**	**12,5**

d) Construire la courbe C_f dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous. Quel nom porte cette courbe ? 5



2- Etude de la fonction g.

a) Quelle particularité présente cette fonction ? Quel nom lui donne-t-on ?

g est de la forme $x \longmapsto ax + b$; c'est une fonction affine avec a = -1 et b = 2.

b) Quel nom donne-t-on à sa représentation graphique ? Quelle particularité présent-t-elle ?

La représentation graphique de la fonction g est une droite (ne passant pas par l'origine du repère).

c) Tracer la représentation graphique C_g de la fonction g dans le repère précédent.

	A	B
x	**0**	**2**
y	**2**	**0**

3- Résolution de l'équation.

a) Noter I_1 et I_2 les deux points d'intersection des courbes C_f et C_g.

b) Quels sont les abscisses de ces deux points ?

I_1 a pour abscisse $x_{I1} \approx -3{,}2$ et I_2 a pour abscisse $x_{I2} \approx 1{,}2$.

c) Aux approximations près, les abscisses de I_1 et I_2 sont-elles solutions de l'équation :

<u>1^{er} membre</u>		**<u>2^{ième} membre</u>**	
x_{I1} = **-3,2**	x_{I2} = **1,2**	x_{I1} = **-3,2**	x_{I2} = **1,,2**
$0{,}5 \times (-3{,}2)^2 \approx 5{,}12$	**$0{,}5 \times (1{,}2)^2 \approx 0{,}72$**	**$-(-3{,}2) + 2 \approx 5{,}12$**	**$-1{,}2 + 2 \approx 0{,}8$**

L'égalité est vérifiée pour x = -3,2

L'égalité est vérifiée pour x = 1,2

<u>Ces abscisses sont solutions de l'équation.</u>

__Principe :__

Modifier l'équation de départ pour revenir à une expression dont on sait trouver la solution.

Toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ peut se résoudre :

1-en considérant les __abscisses__ des points d'intersection d'une parabole et d'une droite.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 = -bx - c$$

α) On considère la fonction f définie par

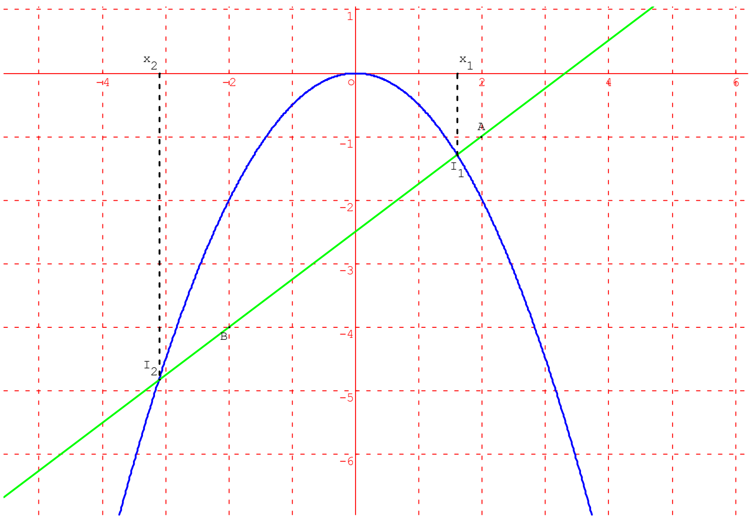
$$f(x) = ax^2.$$

Sa représentation graphique est une parabole (f étant une fonction carrée).

β) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = -bx - c\ .$$

Sa représentation graphique est une droite (g étant une fonction affine).



2- En considérant les __abscisses__ des points d'intersection d'une hyperbole et d'une droite.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x\left(ax + b + \frac{c}{x}\right) = 0$$

$$\frac{c}{x} = -ax - b$$

α) On considère la fonction f définie par

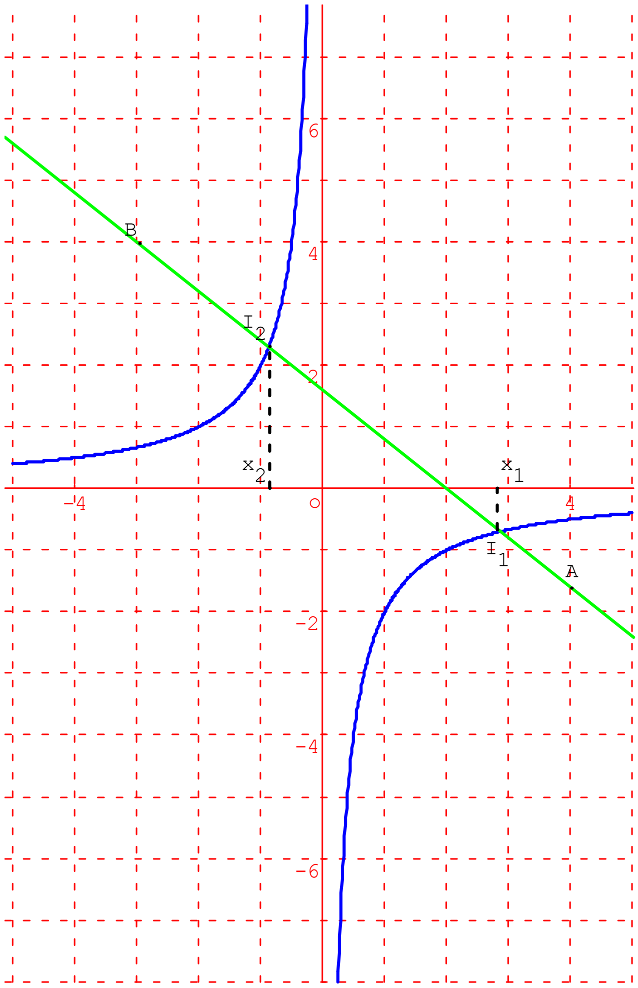
$$f(x) = \frac{c}{x}.$$

Sa représentation graphique est une hyperbole (f étant une fonction inverse).

β) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = -ax - b\ .$$

Sa représentation graphique est une droite (g étant une fonction affine).



__Méthode__ :

1. **On représente chacune des fonctions dans un repère orthonormal en prenant soin d'énumérer les propriétés des fonctions (parité, sens de variations)**
2. **On repère les points d'intersection I_1, I_2, …**
3. **Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.**

APPLICATIONS

Exercice I

Résolvez (sur le cahier d'exercice)l'équation :

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Exercice II : Puissance électrique dissipée dans un conducteur ohmique.

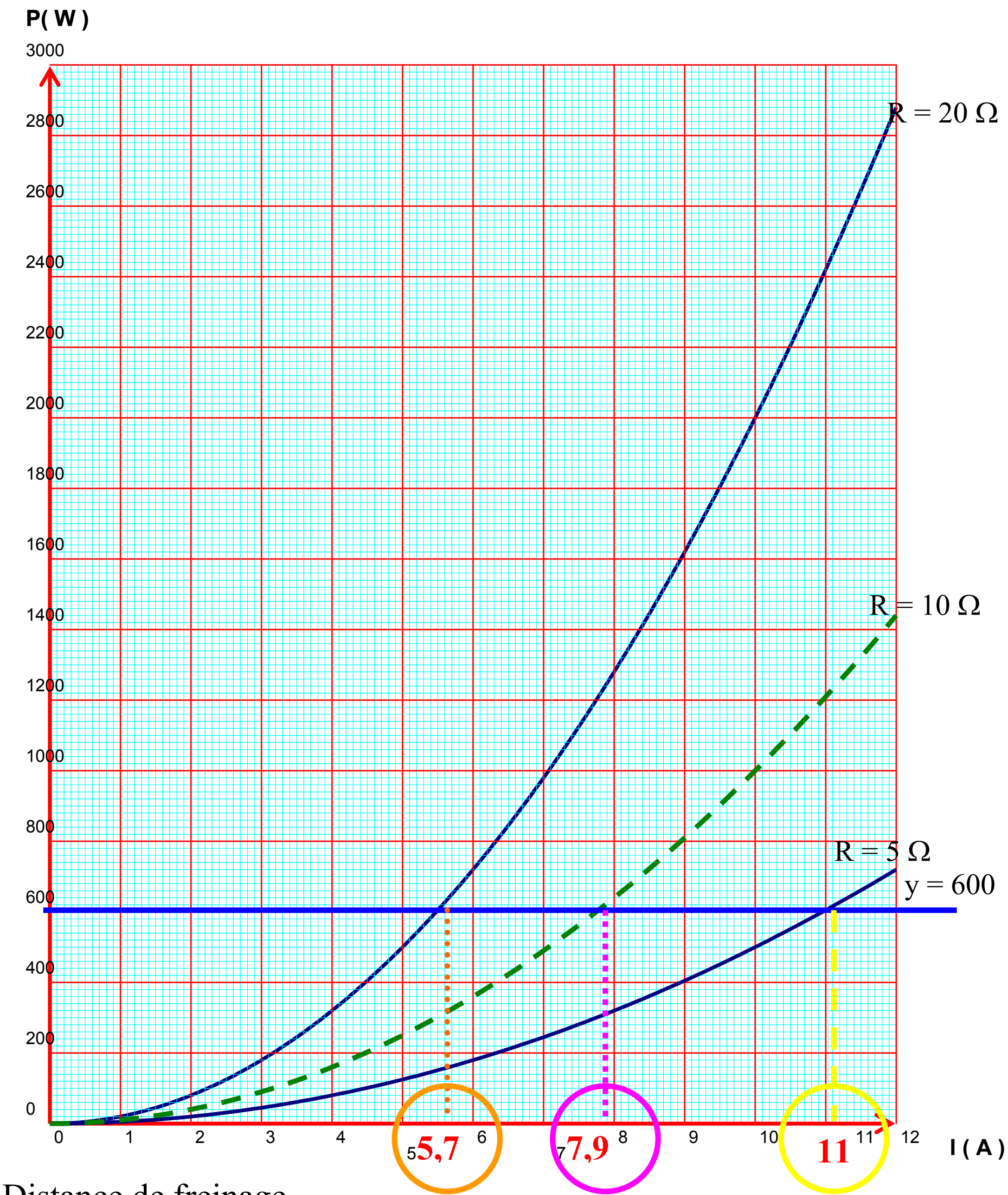
La puissance électrique P (Watt) dissipée dans un conducteur de résistance R (ohm) parcouru par un courant d'intensité I (ampère) est donnée par la relation :

$$P = R.I^2 \text{ avec I variant de 0 à 12 A.}$$

a) **Tracer** l'abaque P = f(I) pour R = 5 Ω ; R = 10 Ω ; R = 20 Ω

Echelle : *En abscisse* : 1 cm pour 1A *En ordonnée* : 1 cm pour 200 W

b) **Déterminer** graphiquement, pour chacune des résistance données ci-dessus, l'intensité du courant I qui traverse le circuit pour une puissance de 600 W.



Exercice III : Distance de freinage.

La distance de freinage d, en mètres, d'une voiture s'exprime en fonction de la vitesse en km/h par la relation :

$$\boxed{d = 0,008\ v^2}$$

a) **Calculer** la distance de freinage pour cette voiture freinant alors qu'elle roulait à 30 km/h, 50 km/h, 70 km/h, 90 km/h, 110 km/h et 130 km/h.

v(k/h)	30	50	70	90	110	130
d (m)	7,2	20	39,2	64,8	96,8	135,2

b) **En déduire** les variations de la fonction f : v $\longmapsto$ d sur l'intervalle [0 ; 130].

x	0	130
f(x)	0 ↗	135,2

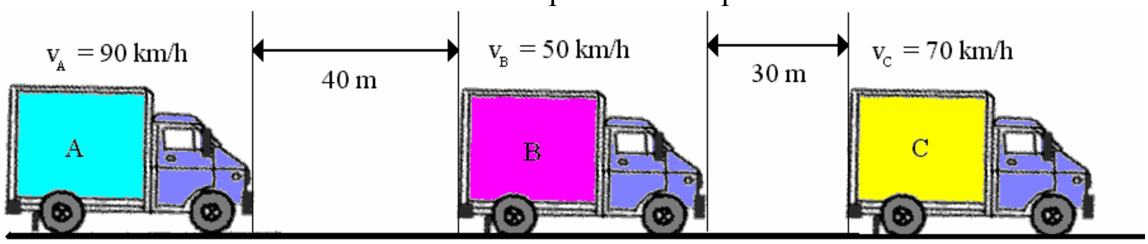
c) **Représenter** la fonction f définie pour v dans l'intervalle [0 ; 130] dans un repère orthogonal
(**unités graphiques** : *en abscisse* : 1 cm $\longmapsto$ 10 km/h *en ordonnée* :1 cm $\longmapsto$ 10 m)

(Voir feuille suivante)

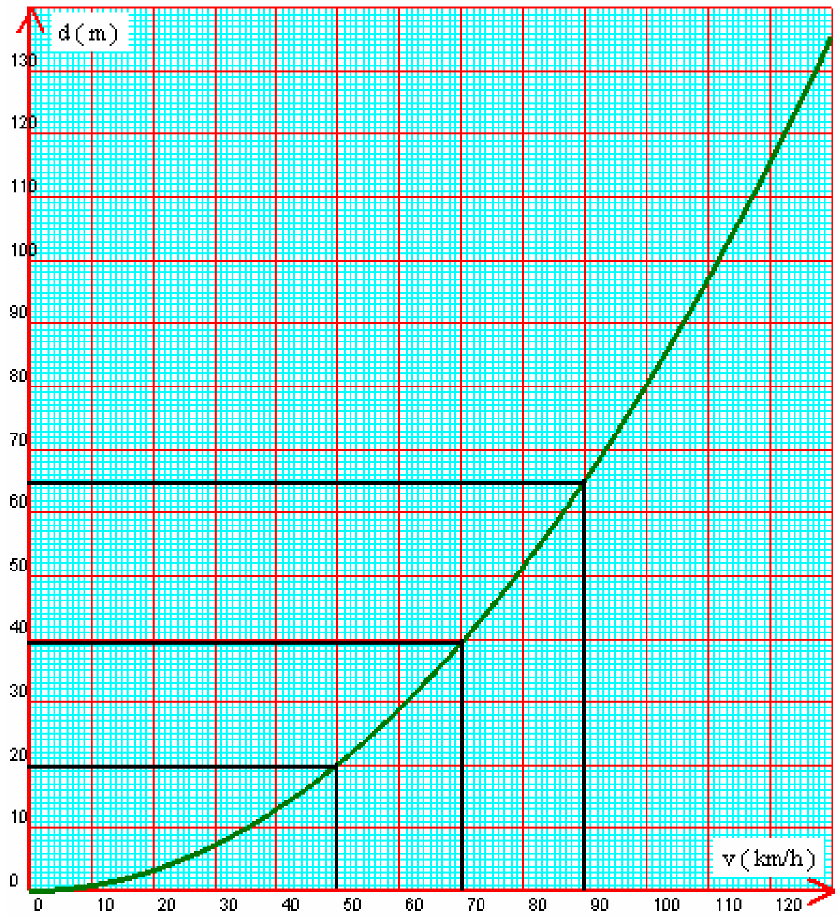
d) **Résoudre** graphiquement l'équation f(v) = 51,20. Formuler la réponse par une phrase.

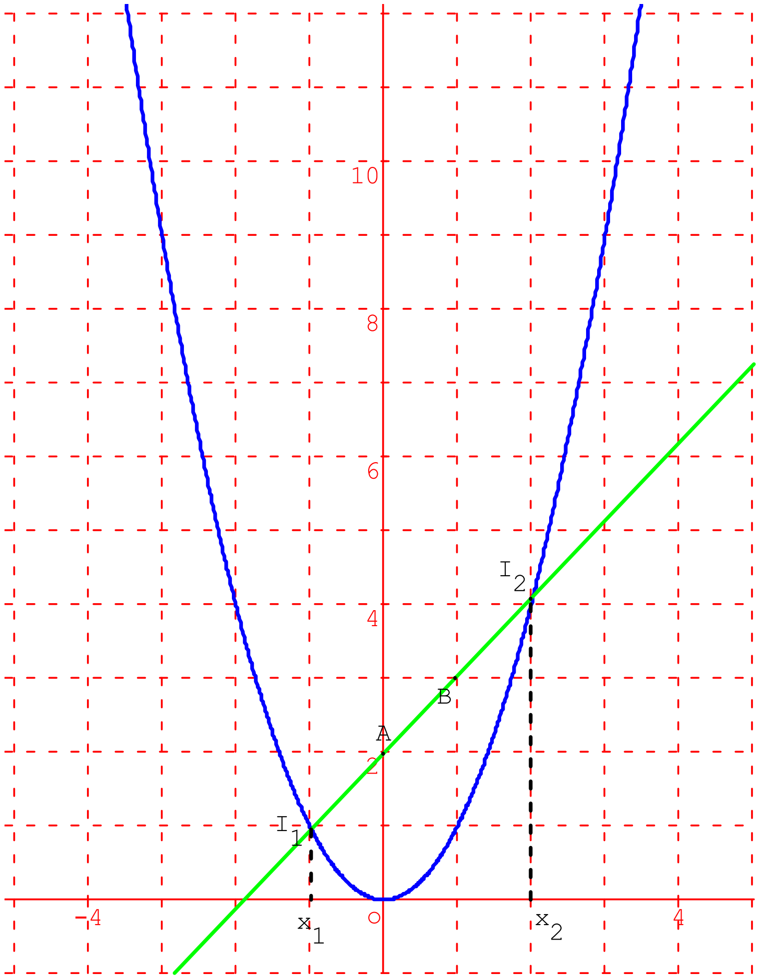
Graphiquement, on trouve comme solution v = 80 km/h.

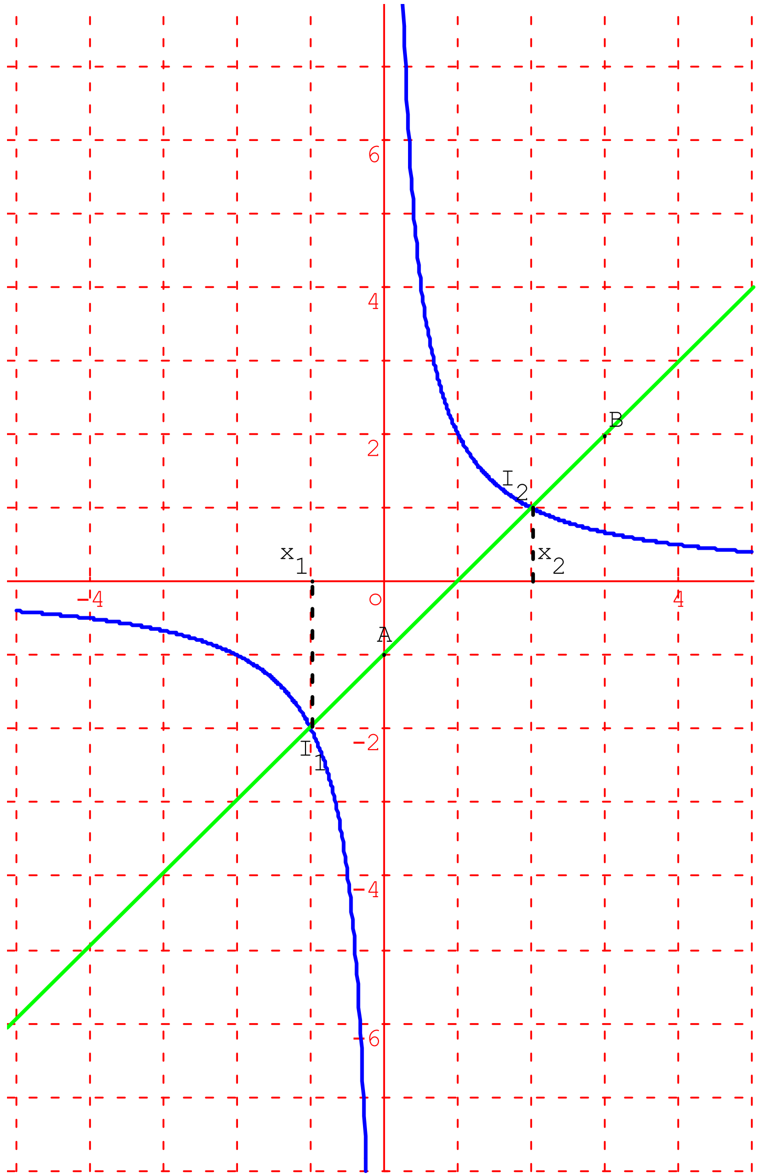
e) Trois véhicules roulent l'un derrière l'autre sans pouvoir se dépasser :



- **Le véhicule C s'immobilise**, quelle distance lui faut-il ? **A la vitesse de 70 km/h, il faut 40 m au conducteur pour immobiliser le véhicule.**
- **Le véhicule B réagit « immédiatement »** : La distance BC est-elle suffisante pour éviter l'accident ? **BC = 30 + 40 or à la vitesse de 50 km/h, il faut environ 20 m pour que le véhicule B s'arrête. La distance BC est donc suffisante pour que le véhicule B s'arrête sans percuter le véhicule A.**
- **Le véhicule A est supposé réagir en même temps** : la distance AB est-elle suffisante pour éviter accident ? **AB = 40 + 20 = 60 m or à la vitesse de 90 km/h, il faut environ 65 m pour que le véhicule A s'arrête. La distance AB n' est pas donc suffisante pour que le véhicule A s'arrête sans percuter le véhicule B.**




10
8
6
4
2
A
B
I 2
I 1
-4
o
4
x 1
x 2


6
4
2
B
I 2
x 1
x 2
-4
o
4
A
-2
I 1
-4
-6