Repérage et vecteurs

Chapitre 10 page 241

Introduction :

Rappels pour démarrer : **Page 241**

I-Egalité de vecteurs

1- Détermination d'un vecteur.

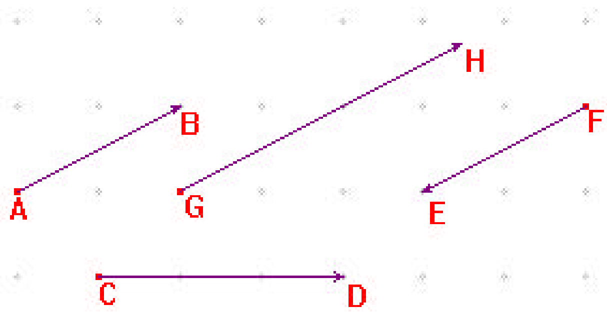
Un vecteur non nul est déterminé par :
- sa **direction ;**
- son **sens** ;
- sa **longueur** ou **norme**.

Exemple :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **n'ont pas la même direction : ils ne peuvent donc pas avoir le même sens.**

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ **ont la même direction mais pas le même sens.**

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ **ont la même direction et le même sens.**



Vocabulaire

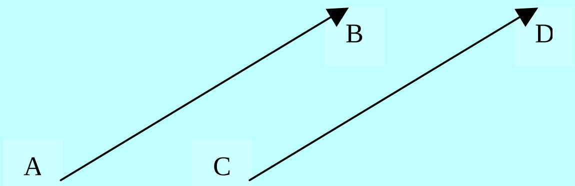
A est l'**origine** et *B* est l'**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$

2- Vecteurs égaux.

Propriété 1 :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors

le quadrilatère *ABDC* est un parallélogramme.

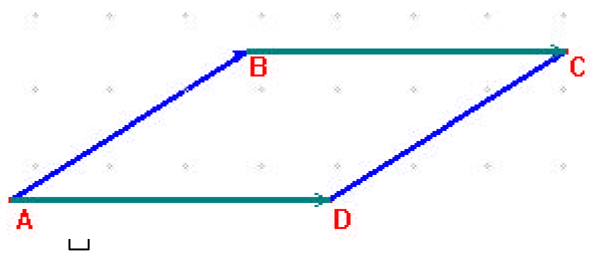


Propriété 2 :

Si le quadrilatère **ABCD** est un **parallélogramme** alors

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

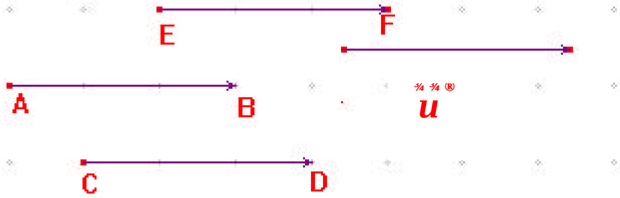


3- Notation $\vec{u}$: Représentant d'un vecteur.

Quelles égalités pouvez-vous écrire?

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

On pose alors : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$



Notation

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des **représentants** du vecteur $\vec{u}$

la **norme** du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$

Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

II. Somme de vecteurs (addition vectorielle).

1- Relation de Chasles

a-activité.

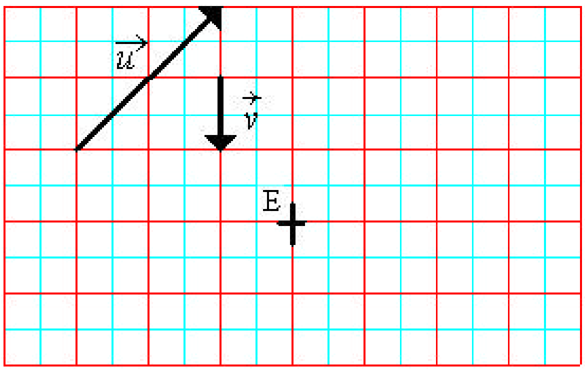
Tracer :

- Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ tels que :
  $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{FG} = \vec{v}$
- Le vecteur $\overrightarrow{EG}$

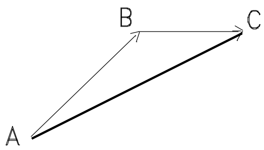
Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$

On a :

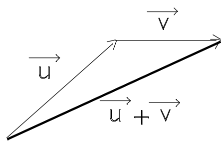
$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{u} + \vec{v}$$



b-Relation de Chasles.



$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$



2- Règle du parallélogramme

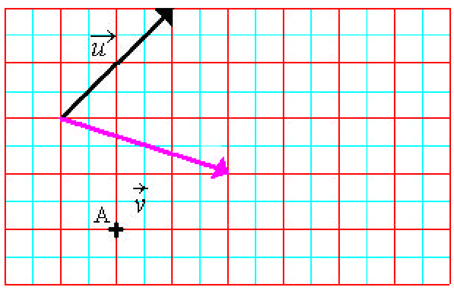
a-activité.

Tracer :

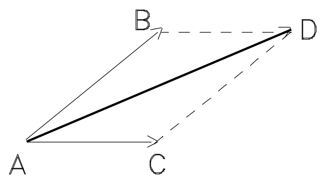
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ tels que :
  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$
- Le parallèlogramme ABCD ;
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, on a :

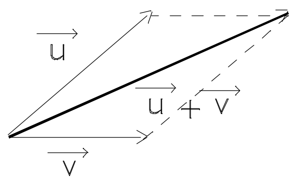
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$$



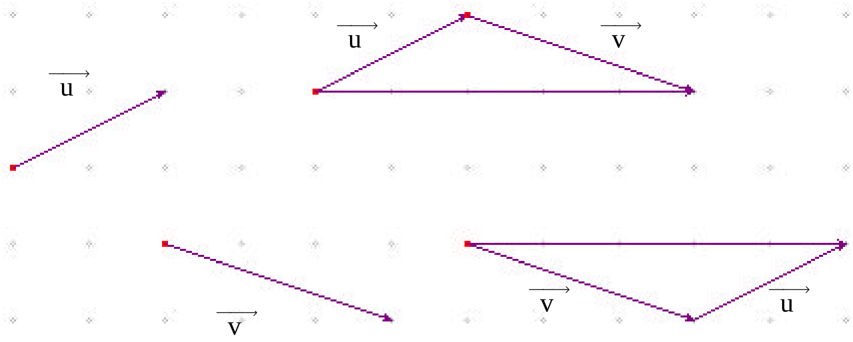
b-règle du parallélogramme.



$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}}$$



3- L'addition vectorielle est commutative.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$$

III.Vecteur nul- Vecteur opposé- Différence de vecteurs.

1- Vecteur nul

Tout vecteur ayant son extrémité confondue avec son origine est appelé **vecteur nul**.

Il est noté : $\vec{0}$

Propriétés :

- Sa norme est **nulle**, sa **direction** et son **sens** ne sont pas **définis**.
- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$ quels que soient les points A, B et M.

2- Opposé d'un vecteur

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$; posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

On écrit que : $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}}$

On dit que : le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$

le vecteur $-\vec{u}$ est l'**opposé** du vecteur $\vec{u}$

Propriétés :

deux vecteurs opposés (non nuls) ont **la même direction**, la **même norme** et sont de **sens contraire**.

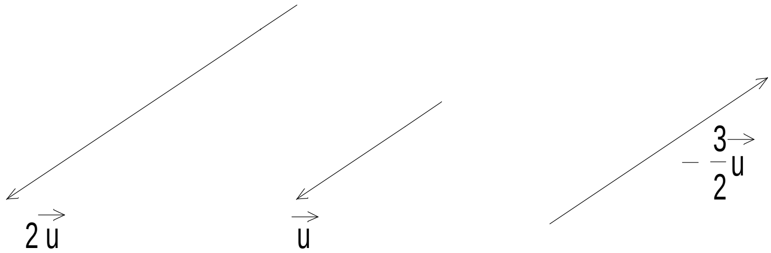
3- Différence de deux vecteurs

On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur somme $\vec{u} + (-\vec{v})$

Pour construire le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ il faut donc commencer par représenter **le vecteur $-\vec{v}$*(opposé de ®)*** puis construire la **somme $\vec{u} + (-\vec{v})$**

IV. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Exemples : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul :



♦ Le vecteur $2\vec{u}$ est le vecteur :

① de **même direction** que le vecteur $\vec{u}$

② de **même sens** que le vecteur $\vec{u}$
car 2 est positif,

③ de longueur $2\,\|\vec{u}\|$

♦ Le vecteur $-\frac{3}{2}\vec{u}$ est le vecteur :

① de **même direction** que le vecteur $\vec{u}$

② de **sens opposé** au vecteur $\vec{u}$
car $-\frac{3}{2}$ est négatif,

③ de **longueur** $\frac{3}{2}\,\|\vec{u}\|$
car une longueur est positive.

Remarques :

pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour tous nombres réels k et k',

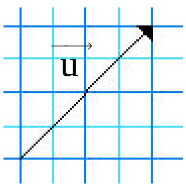
$0\vec{u} = \vec{0}$ $\qquad$ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

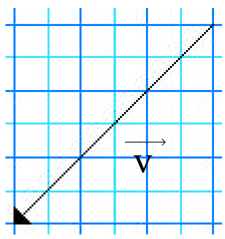
$k\vec{0} = \vec{0}$ $\qquad$ $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

V. Colinéarité de deux vecteurs

1- Définition

• Deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits <u>colinéaires</u> s'ils ont la **même direction**.





• Par définition, $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

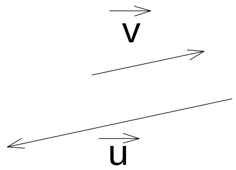
2- Propriétés

① Si les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un nombre réel $\boldsymbol{k}$ tel que :

$$\vec{u} = \boldsymbol{k}\vec{v}$$

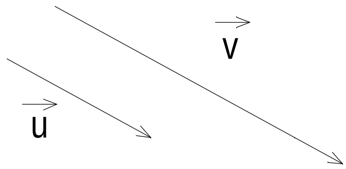
② S'il existe un nombre réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u} = \boldsymbol{k}.\vec{v}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires.**

Exemples



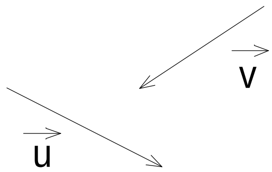
$\vec{u} = -\mathbf{2}\vec{v}$

$k = -2$



$\vec{u} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{v}$

$k = \frac{1}{2}$



Il n'existe pas de nombre k tel que $\vec{u} = \boldsymbol{k}\vec{v}$

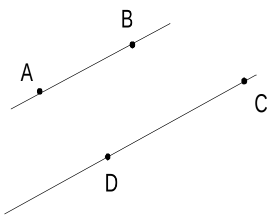
VI. Application de la colinéarité.

1- Parallélisme de deux droites

Soient (A, B) et (C, D) deux couples de points distincts.

Pour prouver que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires,
c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\boldsymbol{k}$ tel que :

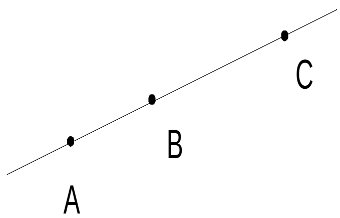
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{k}\,\overrightarrow{CD}}$$



2- Alignement de points.

Soient A, B et C trois points distincts.

Pour prouver que les points A, B et C sont alignés,
il suffit de démontrer, en utilisant la colinéarité, que les droites (AB) et (AC) sont parallèles - ou bien (AB) et (BC), ou encore (AC) et (BC) -

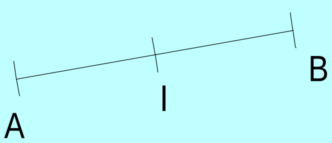


3- Caractérisation du milieu I d'un segment [AB]

Propriété :

I milieu du segment $[AB]$ se traduit vectoriellement par la relation de colinéarité

$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ ou par $\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}}$ ou encore par $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

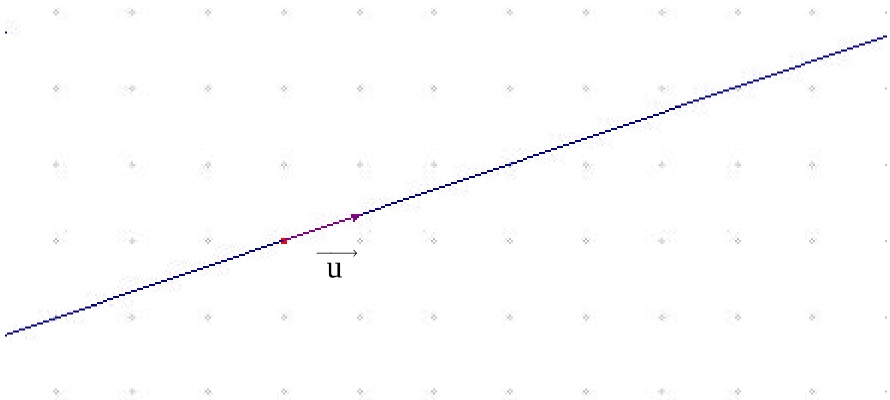


4- Activité.

1 • **Comprendre le cours :**

a) Dans le repère (O ; $\vec{u}$) ci-dessous, placer les points M et N d'abscisse 4 et –3. Exprimer en fonction de $\vec{u}$ les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OM}$ = ….. $\overrightarrow{ON}$ = ….. $\overrightarrow{MN}$ = ……



b) Compléter les caractéristiques des vecteurs :

vecteur	**direction**	**sens**	**longueur**
$\overrightarrow{OM}$	celle de $\vec{u}$	celui de $\vec{u}$	$4 \|\vec{u}\|$
$\overrightarrow{ON}$			
$\overrightarrow{MN}$			

b) Compléter les phrases :
Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{ON}$, car ces deux vecteurs sont …………………..

Le signe de x est …………………….. , car ………………………………………………..

De plus, OM = 4 et ON = 3 donc on obtient la valeur du réel x : …………..

d) De même , il existe un réel y tel que $\overrightarrow{MN} = y.\overrightarrow{ON}$. Déterminer y.

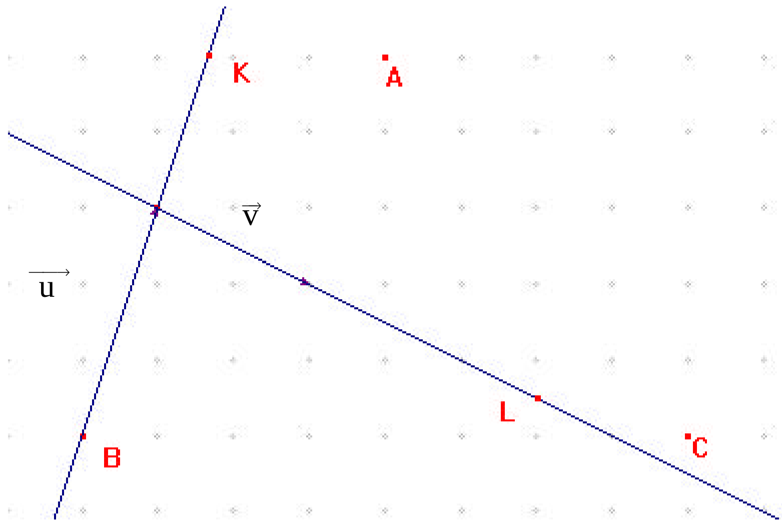
……………………………………………………………………………………………

2 En utilisant le quadrillage ci-dessous, placer les points M, N et P définis par les relations :

$$\overrightarrow{AM} = 3\,\vec{v} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}\vec{v}.$$

a) Comme les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\vec{u}$ sont ………….., il existe un réel x tel que $\overrightarrow{BK} = x.\vec{u}$. On obtient x = ………………………

b) De la même façon, on écrit $\overrightarrow{BL} = \vec{u} + y.\vec{v}$. On obtient y = ……………………………



3 Relier chaque situation vectorielle à la situation géométrique qui lui correspond.

	Relation vectorielle		situation géométrique	Schéma des situations
a)	$\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MS}$	**1-**	S est le milieu de [RT]	
b)	$\overrightarrow{RS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MT}$	**2-**	RSTM est un trapèze	
c)	$\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MT})$	**3-**	RTSM est un parallélogramme	
d)	$\overrightarrow{RM} = k\,\overrightarrow{RS}$, $k \in [\,0\,;1\,]$	**4-**	P ∈ [RS]	
e)	$\overrightarrow{RT} = -\,\overrightarrow{SM}$	**5-**	R est le milieu de [MS]	

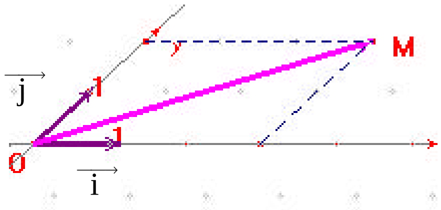
VI Propriétés élémentaires dans un repère..

1- Propriétés des vecteurs dans une repère (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$)

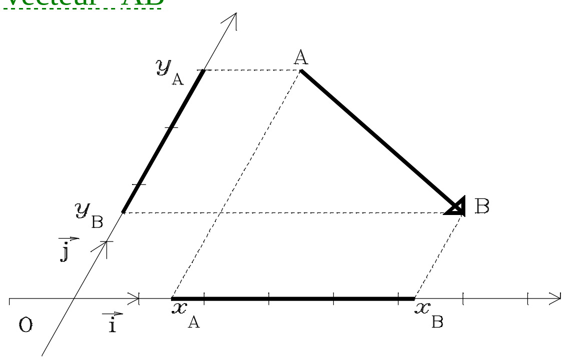
a-exemple.

M (2 ; 6) signifie que $\overrightarrow{OM} = 3\ \vec{i} + 2\ \vec{j}$.

On note $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



b-Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$



Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$,

les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}}$$

c-Coordonnées du milieu I d'un segment [AB]

Puisque $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, on a $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$ et encore $2\ \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Par suite $\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases}$

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont donc : $\boxed{I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)}$

2- Propriétés des vecteurs dans un repère Orthonormal

a- Orthogonalité

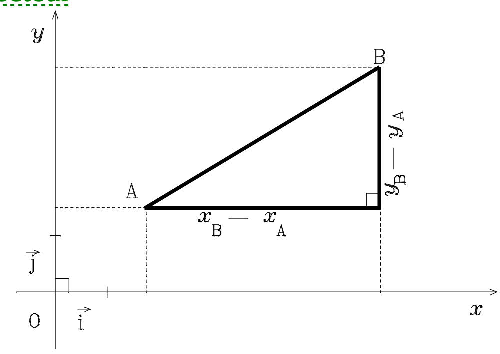
On dit que 2 vecteurs non nuls sont **orthogonaux** lorsqu'ils définissent des directions **orthogonales,** c'est à dire que les droites supports des représentants de ces vecteurs sont **perpendiculaires**. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$

On dit que *(O ;* $\vec{i}$ *;* $\vec{j}$ *)* est **un repère orthonormal** lorsque

$$\vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$$

b-Calcul de la norme d'un vecteur

La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



♦ **Calcul de la distance entre deux points**

Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$, la distance entre les points A et B est obtenue à partir de : $\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

:

Repérage et vecteurs

Chapitre 10 page 241

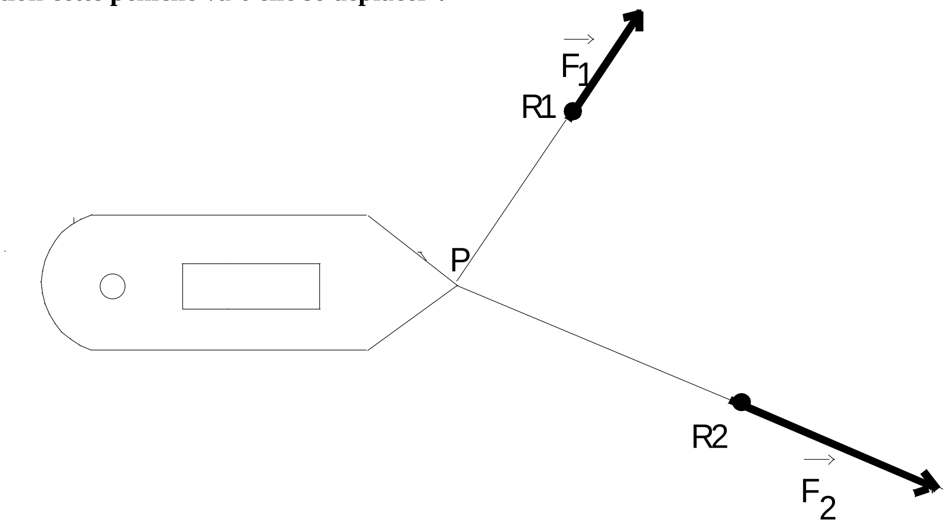
Introduction :Rappels pour démarrer : (Page 241)

TD OUVERTURE : VECTEURS ET FORCES

1 La péniche

Une péniche dont le gouvernail a été endommagé est tirée par deux remorqueurs de puissances différentes, repérés sur le dessin par les points R_1 et R_2 et disposés comme sur la figure ci-dessous. La longueur des flèches représentant les vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est proportionnelle à la force de traction de chacun des remorqueurs.

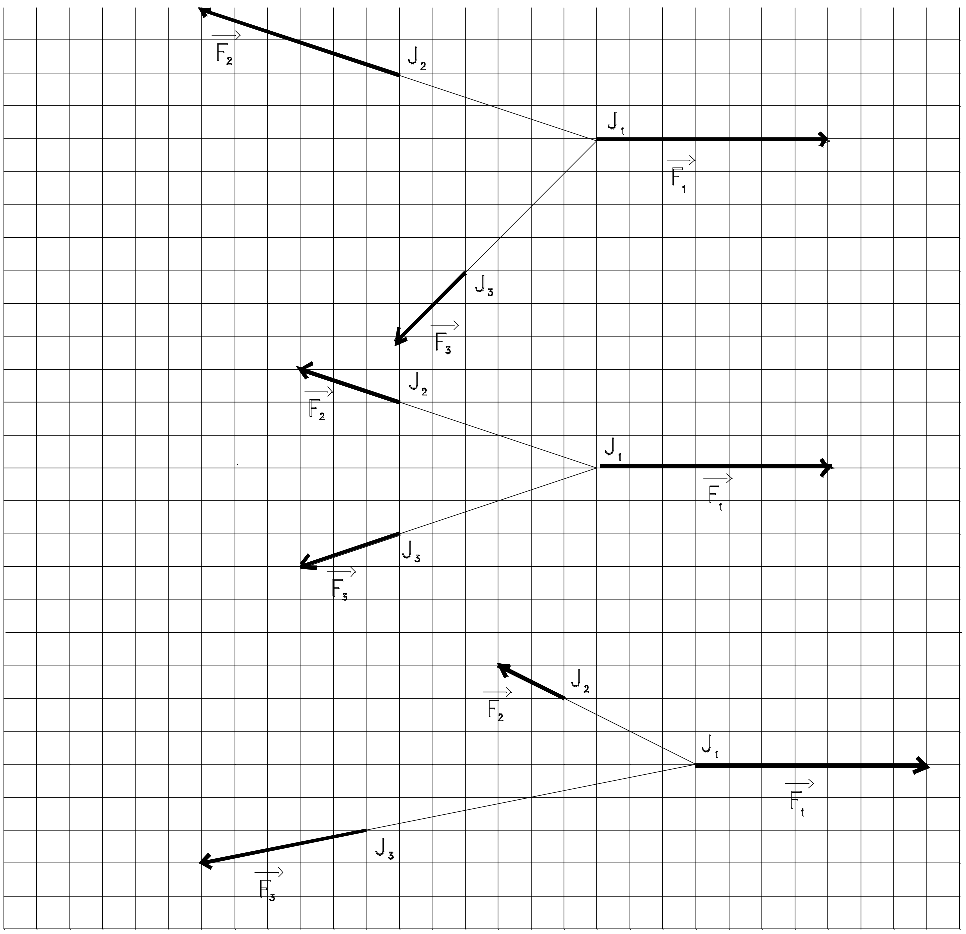
Dans quelle direction cette péniche va-t-elle se déplacer ?



Tout se passe comme si le point P était soumis à la traction $\vec{F}$ d'un câble unique avec $\boxed{\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}}$

2 L'entraînement de rugby

Au cours d'une séance d'entraînement de rugby, afin de faire travailler la puissance des jambes, l'entraîneur propose l'exercice suivant : un des joueurs J_1 est retenu à l'aide de deux cordes par deux autres joueurs J_2 et J_3 et doit s'efforcer d'avancer.



Déterminer, dans chacun des trois cas, si J_1 avance ou recule.
Dans chacun des cas ci-dessus, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ sont les forces auxquelles J_2 et J_3 soumettent J_1, qui, lui, tire avec une force $\vec{F_1}$.
On admet que l'intensité de ces forces est proportionnelle à la norme des vecteurs représentés