I- Les ensembles de nombres

1-Ensemble des entiers naturels.

Les nombres **naturels** sont **0, 1, 2, 3, 4, 5, ...**

L'ensemble des nombres naturels est noté ℕ **.** Il est défini par :

ℕ = { 0, 1, 2, 3, ..., 12, 13, ..., 200, ...}

Remarque: *Pour traduire le fait qu'un élément appartienne à un ensemble, on utilise le symbole d'appartenance « Î » ou de non-appartenance « Ï ». Ex : 2 Î É .*

Ex : 2 … Î ….. ℕ ; $\frac{2}{3}$ … *Ï* …… ℕ

2-Ensemble des entiers relatifs.

a- Définition.

Les nombres **entiers relatifs** (ou simplement nombres entiers) sont :

............, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

L'ensemble des nombres entiers est noté ℤ.

ℤ = {........, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

b- Remarque.

Tout nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif.

On dit que ℕ est inclus dans ℤ. On le note :

ℕ ⊂ ℤ

Remarque: *Le symbole Ì se lit «est contenu» ou encore «est inclus».*

3-Ensemble des nombres rationnels.

a- Définition.

Les nombres **rationnels** sont **les quotients d'entiers de la forme $\frac{a}{b}$,**

avec a entier et b entier non nul (b ≠ 0).

L'ensemble des nombres rationnels est noté **.**

Ex : $\frac{2}{5}$ **…** *Î* . ℚ ; $\frac{2}{3}$ **…** *Î* … ℚ ; -2**…** *Î* .. ℚ ; -$\frac{1}{3}$ **…** *Î* … ℚ

b- Remarque.

Tout nombre entier est aussi un nombre rationnel.

On dit que ℤ est inclus dans . On le note :

c-Cas particulier.

Les nombres décimaux sont des nombres rationnels pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{2^n \times 5^m}$$ **avec a entier et n et m entiers naturels…**

L'ensemble des nombres décimaux est noté **…D…**

On dit que **……D…** est inclus dans **……** **...** On le note :

D ⊂

Ex 0,034 **…** *Î* **….** d car 0,034 = $\frac{34}{1000}$

$\frac{1}{3}$ …∉ … d car $\frac{1}{3}$ = **0,3333333...**

4-Ensemble des nombres irrationnels.

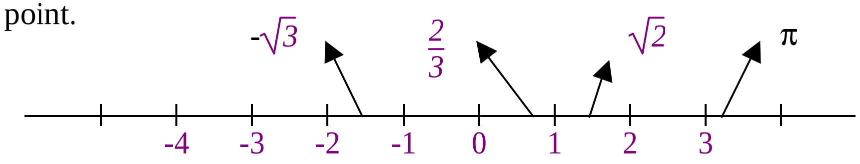
Les nombres **irrationnels** sont les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions.

........................$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ $\frac{b^2}{4}$ ....

5-ensemble des nombres réels.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels. **L'ensemble des nombres réels** est noté **R** .

Chaque nombre réel est associé à un point d'une droite graduée : c'est l'**abscisse** de ce point.



6-Conclusion.

	ℕ ⊂ ℤ ⊂ D ⊂ ⊂

7-Application.

TDn°1

II- Nombres et calculatrices

1-Valeurs exactes, valeurs décimales approchées, arrondis.

Pour des réels non décimaux (tels que $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\sqrt{2}$,...), il est faux d'écrire les égalités telles que

$$\cancel{\frac{1}{3} = 0{,}33} \quad \text{ou} \quad \cancel{\pi = 3{,}14} \; .$$

Quelques écritures autorisées.

écriture	signification
π = 3,14...	3,14 est la valeur approchée de π à deux décimales par défaut (ou **troncature** à deux décimales)
π ó 3,14 à 0,01 près (ou π ó 3,15)	3,14 (ou 3,15) est une valeur approchée de π à 0,01 près,

RAPPEL !

Troncature
On supprime les décimales qui suivent.

Arrondi
On conserve la décimale si la suivante est 0,1,2,3,4, ; on ajoute 1 à la décimale si la suivante est 5,6,7,8, ou 9.

2-Représentation sur la calculatrice.

Les calculatrices ne connaissent que des nombres décimaux (ceux dont l'écriture ne dépassent pas l'affichage permis). Elles affichent donc l'arrondi décimal d'un résultat :

- Avec toutes les décimales permises en mode normal
($\boxed{\text{Norm}}$ $\boxed{\text{n}}$ chez Casio et $\boxed{\text{Normal}}$ chez Texas).
- Avec un nombre fixé de décimales en « mode n décimales »
($\boxed{\text{Fix}}$ chez Casio et $\boxed{\text{Float}}\boxed{\text{n}}$ chez Texas).

Tapez la séquence correspondant à votre machine

Valeur exacte		$\sqrt{2} + \sqrt{5}$
séquence machine		....
en mode "4 décimales"	**affichage**	**3.6503**
	interprétation	**3,650 2** $\leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \leq$ **3,650 35**
en mode normal	**affichage**	**3.65028154**
	interprétation	**3,650 281 535** $\leq \sqrt{2} + \sqrt{5} \leq$ **3,650 281 545**

III- Règles de calculs dans

1-Priorité opératoire.

a- Règles.

1. les parenthèses indiquent une priorité opératoire.
2. multiplier ($\times$) et diviser ($\div$) sont prioritaires par rapport au plus (+) et au moins (-).

Ex:

- $\frac{2}{3} \times 4 - 2 = \mathbf{\frac{2}{3}}$
- $3{,}2 - 2 \times 0{,}4 =$ **2,4**

3. l'addition et la soustraction peuvent se faire dans n'importe quel ordre, de même pour la multiplication et la division.

Ex:

- 3,3-0,7+5,= **7,6**
- $15 \div 3 \times 2 =$ **10**
- $12 \times 6 \div 3 =$ **24**

b- Applications.

Placer des parenthèses aux bons endroits pour que les égalités suivantes soient vraies :

a) 1 - 2 + 3 - 4 = 0

Réponse: **..............1 – (2 + 3 - 4)= 0 ....**

b) 1 - 2 - 3 - 4 = 0

Réponse: **...........(1 - 2) – (3 – 4) = 0 ....**

c) - 24 - 27 - 30 - 33 = 0

Réponse: **.........-[(24 - 27) – (30 - 33)]= 0 ....**

d) 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 = 0

Réponse: **......(1 - 3 + 5) – (7 + 9 - 11 + 13 - 15) = 0 .....**

2-Règles de calculs avec des produits.

signes -	$a \times (-b) = \mathbf{(-a) \times b = -ab}$ $(-a) \times (-b) = \mathbf{ab}$
produit nul	Dire qu'un produit est nul signifie **que l'un au moins des facteurs est nul.**
simplification	Si $ac = bc$ (et $c \neq 0$) **alors $a = b$**
produits remarquables	$(a+b)^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ $(a-b)^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$ $(a+b)(a-b) = \mathbf{a^2 - b^2}$

3-Règles de calculs avec des quotients.

signes -	$\frac{a}{b} = \mathbf{\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$ et $\frac{-a}{-b} = \mathbf{\frac{a}{b}}$
simplification	$\frac{ka}{kb} = \mathbf{\frac{a}{b}}$ (si $k \neq 0$)
égalité	$\frac{a}{b} = \mathbf{\frac{c}{d}}$ se traduit par $\mathbf{ad = bc}$ $(b\ ^{1}\ 0\ ;\ d\ ^{1}\ 0)$
Addition	$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \mathbf{\frac{a+b}{d}}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \mathbf{\frac{ad+bc}{bd}}$ **(si $b \neq 0$ et $d \neq 0$)**
Multiplication	$k \times \frac{a}{b} = \mathbf{\frac{ka}{b}}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \mathbf{\frac{ac}{bd}}$
division	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \mathbf{\frac{b}{a}}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \mathbf{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$

4-Règles de calculs avec des quotients.

- Applications 3, 4, 5 page 12 (livre) ; 7 page 14
- TDn°3

IV- Puissances

1-mise en situation.

Fiche 15.2 page 82

2-La notation a^n.

Soit a un nombre réel et n un entier relatif. On pose :

- si $n \geq 0$, $a^n = a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a$ (n facteurs égaux à a)
- si $n = 0$, $a^0 = 1$

si $n > 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

3-Règles de calcul.

- Produit de deux puissances : $\mathbf{a^n \times a^m = a^{n+m}}$
- Quotient de 2 puissances : $\mathbf{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$
- Puissance d'une puissance : $\mathbf{(a^n)^m = a^{n \times m}}$
- Puissance d'un produit : $\mathbf{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$
- Puissance d'une fraction : $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$

4-les puissances de dix.

Fiche 15.1 page 81

4-notation scientifique d'un décimal.

a-définition.

La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$, où a est un décimal vérifiant $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.

Ex:

593,7	a pour écriture scientifique	$\mathbf{5{,}937 \times 10^2}$
-0,051		$\mathbf{-5{,}1 \times 10^{-2}}$
35×10^{-4}		$\mathbf{3{,}5 \times 10^{-3}}$
-73 000		$\mathbf{-7{,}3 \times 10^4}$

b-application aux calculatrices.

Suivant le modèle de calculatrice que vous possédez, décrivez la séquence à effectuer pour paramétrer la calculatrice en mode scientifique :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c-applications

E2 page 87

6-Synthèse.

TDn°4

V- Racines carrées

1-mise en situation.

Fiche 16.1 page 83

2-La notation $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$).

Si le **nombre positif** x est tel que :

$x^2 = a \qquad (a \geq 0)$

alors x est la racine carrée de a.

On écrit : $x = \sqrt{a}$

Donc $\sqrt{a}$ **0**

Conséquences :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemples:

$(\sqrt{7})^2 = 7$

$\sqrt{(-0;9)^2} = |-0,9| = 0,9$

Fiche 16.3 page 84

2- règles de calculs.

a-activité.

Fiche 16.2 page 84

b-Propriétés.

- Multiplication de 2 racines carrées : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- Division de 2 racines carrées : $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
- Racine carrée d'une puissance $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ **(n entier et n ≥ 1)**

3- Pièges à éviter.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} \end{array}}$$

3-Applications.

TDn°4

VI- Les nombres premiers.

1-Diviseur d'un entier.

Soient a et b deux entiers naturels.

On dit que **b** est un diviseur de **a** (ou que a est un multiple de b) s'il existe un entier naturel k tel que

$$\boxed{a = k.b}$$

Ex : Les diviseurs de 80 sont :

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80

80	
	1×80
	2×40
	3 non
	4×20
	5×16
	6 non
	7 non
	8×10

On s'arrête, car 9×9 = 81 > 80.

Rq : Tout entier a admet des diviseurs, parmi lesquels les entiers 1 et a.

Application : TD arithmétique « Comprendre le cours »

2- Nombres premiers.

a- Définition.

(Pour reconnaître un nombre premier : 1p14)

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs :

1 et lui-même

Rq:

- 0 est divisible par tous les entiers.
- 1 n'a qu'un diviseur.
- 2 est le plus petit nombre premier, et **le seul qui soit pair**.

0 et 1 ne sont pas premiers

b- Théorème.

Soit n un entier (n ≥ 2). Alors :

- n admet un diviseur premier ;
- si n n'admet aucun diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est lui-même premier.

Ex : 143 est-il premier ?

Des essais successifs montrent que 143 est divisible par 11; donc 143 n'est pas premier.

3- Décomposition en facteurs premiers.

(Pour décomposer un nombre entier en un produit de facteurs premiers : 2p15)

Théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout nombre entier n ≥ 2, se décompose en un produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Ex : Décomposer 140 en un produit de facteurs premiers.

1ère méthode : $140 = \mathbf{14 \times 10}$

puis : $14 = \mathbf{2 \times 7}$ et $10 = \mathbf{2 \times 5}$

d'où $140 = 2^2 \times 7 \times 5$

Cette méthode s'utilise si le résultat est évident.

2ème méthode : On détermine le plus petit diviseur premier de 140 (c'est 2), puis on recommence avec le quotient.

Disposition pratique :

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$
$$= 2^2 \times 5 \times 7$$

Rq : *Vous avez déjà utilisé cette décomposition dans le passé, lors de la simplification de fraction :*

Simplifier : $A = -3 \times \frac{70}{9} \times \frac{2}{35}$

- On décompose les entiers en facteurs premiers :

$$A = -3 \times \frac{7 \times 5 \times 2}{3 \times 3} \times \frac{2}{5 \times 7}$$

- On applique les règles sur les quotients pour simplifier :

$$A = -\frac{3 \times 7 \times 5 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 5 \times 7}$$
$$A = -\frac{2 \times 2}{3}$$
$$A = -\frac{4}{3}$$

4-Applications.

a- Recherche du PGCD de deux entiers.

Le PGCD (plus grand commun diviseur) de deux entiers a et b est le produit de tous les facteurs communs aux décompositions de a et b.

Ex : Déterminer le PGCD de 84 et 630.

On décompose ces nombres :

84 = 2 ´ 2 ´ 3 ´ 7
630 = 2 ´ 3 ´ 3 ´ 5 ´ 7

Donc PGCD (84, 630) = 2 ´ 3 ´ 7 = 42.

b- Simplification des fractions.

Une fraction se met sous forme irréductible en simplifiant le numérateur et le dénominateur par le PGCD.

Ex : $\frac{84}{630} = \frac{2 ´ 2 ´ 3 ´ 7}{2 ´ 3 ´ 3 ´ 5 ´ 7} = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$

c-TD n°5 :arithmétique « Appliquer et savoir-faire » (A1_arithm)

Problème d'arithmétique
Le crible d'Eratosthène.

Dresser la liste des nombres premiers compris entre 2 et 100

La méthode du crible consiste à :

- Dresser la liste des entiers compris entre 2 et 100 ;
- Eliminer tous les multiples de 2, sauf 2, puisque tous ces nombres sont divisibles par 2, donc pas premiers ; le premier entier non supprimé est 3, qui est premier. ;
- Eliminer tous les multiples de 3, à partir de $3^2 = 9$ (car $3 \times 2 = 6$ a déjà été supprimé) ; le premier entier restant est 5, qui est premier ;
- Eliminer les multiples de 5 restants, à partir de $5^2 = 25$ (car 5×2, 5×3 et 5×4 ont été supprimés) ; le plus petit entier restant est 7, qui est premier ;
- Eliminer les multiples de 7 restants, à partir de $7^2 = 49$ (même raisonnement).

Comme $11^2 > 100$, tous les nombres restants sont premiers.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

I

Les ensembles de nombres (p8)

II

Nombres et calculatrices

III

Règle de calculs dans $\mathbb{R}$

IV

Puissances

V

Racines carrées

VI

Les nombres premiers