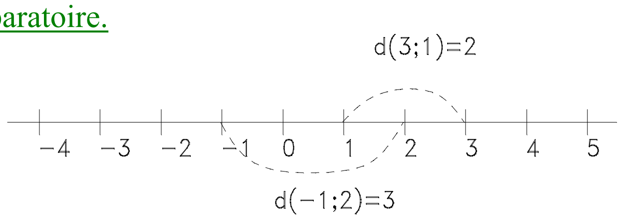
DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE

I. Distance entre deux nombres.

1- Activité préparatoire.

Par exemple: d (3 ; 1) = 2
d (–1 ; 2) = 3.



2- Définition.

♦ Soient a et b deux réels. On note d (a ; b) la **distance** entre a et b.

♦ Pour tous réels a et b,
d (a ; b) est un nombre réel positif
d (a ; b) = d (b ; a)

♦ Comment calculer d (a ; b) dans le cas général ?

Soient a et b deux réels,
si $a \geq b$, alors d (a ; b) = $a - b$,
si $a \leq b$, alors d (a ; b) = $b - a$.

II. Valeur absolue d'un nombre.

1- Définition.

Soit a un nombre réel.
On appelle **valeur absolue de a**, notée $|a|$, la distance entre a et 0.

$$\boxed{|a| = d(a\,;0)}$$

Par exemple, $|32| = d(32\,;0) = 32$ et $\left|-\frac{7}{2}\right| = d\left(-\frac{7}{2}\,;0\right) = \frac{7}{2}$

2- Propriétés.

Pour tout nombre réel a,

- $|a|$ est un nombre réel positif.
- Si a est positif, $|a| = a$
  Si a est négatif, $|a| = \text{opp}(a) = -a$
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : $|-a| = |a|$

3-Conséquence.

Deux expressions algébriques opposées ont la même valeur absolue.

Par exemple, $|-\pi - x| = |\pi + x|$, et $|3 - x| = |x - 3|$

III. Valeur absolue et distance

♦ Pour tous nombres réels a et b, on a : $\boxed{d(a\,;b) = |a - b|}$

Par exemple, si x est un nombre réel :
d (x ; 2) = $|x - 2|$
d (x ; –1,3) = $|x - (-1{,}3)| = |x + 1{,}3|$

♦ **Remarque**:
Des écritures du type $|x - a|$, $|x + a|$, $|a - x|$ ou $|a + x|$, peuvent être définies, soit en tant que distances, soit en tant que valeurs absolues d'expressions algébriques.

Par exemple, $|2 - x| = |x - 2| = d(x\,;2)$
$|-\sqrt{2} - x| = |x + \sqrt{2}| = d(x\,;-\sqrt{2})$

IV. Cas particulier : racine carrée et valeur absolue

Quelle que soit l'expression A, A^2 est toujours positive, donc $\sqrt{A^2}$ existe.

Par exemple, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, et $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Propriété

Pour toute expression T, $\sqrt{T^2}$ existe, et $\boxed{\sqrt{T^2} = |T|}$

V. Valeurs absolues et opérations

♦ La valeur absolue d'un **produit** est égale au produit des valeurs absolues.

Pour tous réels a et b, $\boxed{|a \times b| = |a| \times |b|}$

♦ La valeur absolue d'un **quotient** est égale au quotient des valeurs absolues.

Pour tous réels a et b, $b \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}}$

♦ La valeur absolue d'une **somme** n'est en général pas égale à la somme des valeurs absolues (même problème pour la différence).

Pour tous réels a et b, $\boxed{\text{M} \quad |a+b| = ????????}$

Par exemple, si $a = -3$ et $b = -1$, $|a+b| = 4$ et $|a| + |b| = 4$

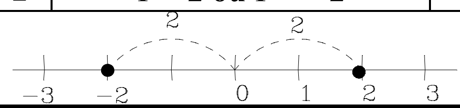
si $a = -3$ et $b = 1$, $|a+b| = 2$ et $|a| + |b| = 4$

Pour tous réels a et b, $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)

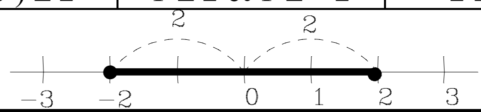
VI. Expressions Équivalentes

Suivant le type de problèmes que l'on est amené à résoudre, on utilise l'une des formulations équivalentes suivantes :

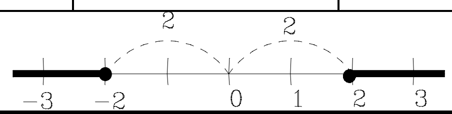
valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$\lvert T\rvert = 2$	$d(T\,;0) = 2$	$T = 2$ **ou** $T = -2$	*	*



valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$\lvert T\rvert \leq 2$	$d(T\,;0) \leq 2$	$T \leq 2$ **et** $T \geq -2$	$-2 \leq T \leq 2$	$T \in [-2\,;2]$



valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$\lvert T\rvert \geq 2$	$d(T\,;0) \geq 2$	$T \geq 2$ **ou** $T \leq -2$	*	$T \in]-\infty\,;-2] \cup [2\,,+\infty[$



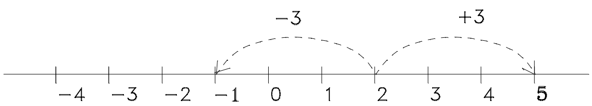
VII. Équations et valeurs absolues

Résoudre $|x-2| = 3$

Il existe deux façons de déterminer les solutions de cette équation :

• en utilisant les distances

Puisque $|x-2| = d(x\,;2)$, on cherche les nombres x tels que $\boxed{d(x\,;2) = 3}$



On a donc S = {– 1; 5}

• en utilisant les propriétés de la valeur absolue

On connaît l'équivalence : $|T| = 3$

$T = 3$ **ou** $T = -3$

On a donc l'équivalence : $|x-2| = 3$

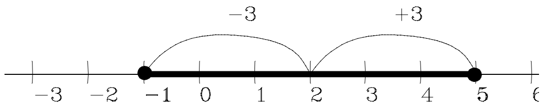
$$x-2=3 \textbf{ ou } x-2=-3$$
$$x=5 \textbf{ ou } x=-1$$
Par suite : $S=\{-1;5\}$

VIII. Inéquations et valeurs absolues

1 ♦ Résoudre $|x-2| \leq 3$

• **En utilisant les distances**

On cherche les nombres x tels que : $d(x,2) \leq 3$



On a donc un intervalle-solution $S=[-1;5]$.

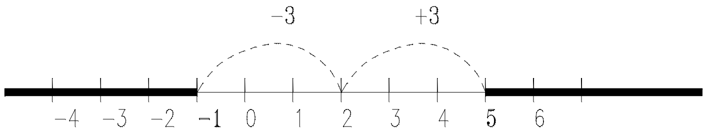
• **en utilisant les propriétés de la valeur absolue**

On connaît l'équivalence : $|T| \leq 3$
$$-3 \leq T \leq 3$$
On a donc l'équivalence : $|x-2| \leq 3$
$$x-2 \geq -3 \textbf{ et } x-2 \geq 3$$
$$x \geq -1 \textbf{ et } x \leq 5$$
Par suite : $S=[-1;5]$; les deux conditions doivent être vérifiées **à la fois.**

2 ♦ Résoudre $|x-2| > 3$

• **en utilisant les distances**

On cherche les nombres x tels que : $\boxed{d(x;2)>3}$



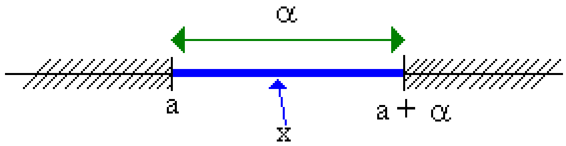
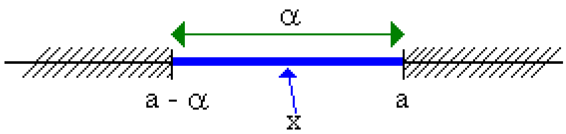
On a donc $S=]-\infty;-1] \cup [5;+\infty[$

• **en utilisant les propriétés de la valeur absolue**

On connaît l'équivalence : $|T|>3$
$$T<-3 \textbf{ ou } T>3$$
On a donc l'équivalence : $|x-2|>3$
$$x-2<-3 \textbf{ ou } x-2>3$$
$$x<-1 \textbf{ ou } x>5$$
Par suite : $S=]-\infty;-1[\cup]5;+\infty[$; les solutions doivent vérifier **l'une ou l'autre** des conditions.

IX- Encadrements et valeurs approchées d'un nombre.

Soit α un nombre strictement positif.

$\lvert x-a\rvert \leqslant \alpha$	$a-\alpha \leqslant x \leqslant a+\alpha$	signifie que a est une valeur approchée de x à la précision α
	$a \leqslant x \leqslant a+\alpha$	signifie que a est une valeur approchée **par défaut** de x à la précision α
	$a-\alpha \leqslant x \leqslant a$	signifie que a est une valeur approchée **par excès** de x à la précision α

DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE