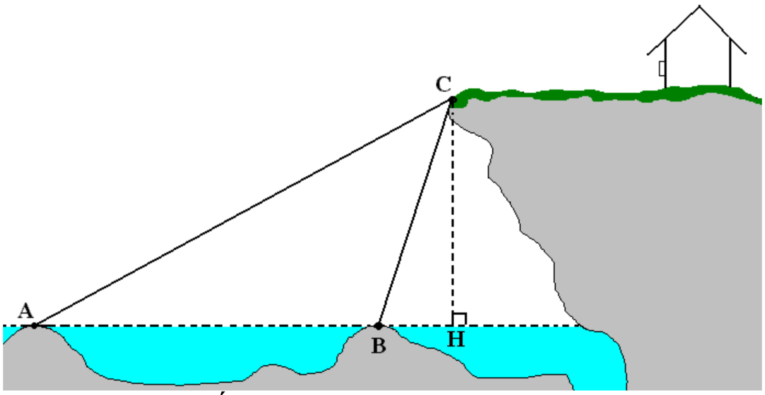
RELATION TRIGONOMETRIQUE DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

<u>Pré-requis :</u>

-Trigonométrie dans le triangle rectangle
-le radian
-la proportionnalité

I-mise en situations



Pour connaître la hauteur de la falaise d'Étretat (Seine maritime), on mesure deux angles d'élévation par rapport à un point C sur la falaise : $\widehat{CAH} = 17°$ et $\widehat{CBH} = 42°$; La distance AB est égale à 253 m.

1- **Construire** sur le quadrillage ci-dessous, les triangles de la figure.

<u>échelle</u> *:1 cm pour 40 m.*

2- **Mesurer** CH. ……………………………………………………………………

3- Nous allons déterminer CH par le calcul.

a) **Donner** l'expression de CH dans le triangle ACH rectangle en H <u>en fonction de</u> BH et de l'angle $\widehat{CAH}$.

……………………………………………………………………………………………

b) **Donner** l'expression de BH <u>en fonction de</u> CH et de l'angle $\widehat{CBH}$ dans le triangle CBH rectangle en H.

c) En utilisant les formules établies au 2.a) et 2.b), donner l'expression de CH en fonction de l'angle $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.

d) **En déduire** CH.

Constatation : ……………………………………………………………

II- Théorème des sinus.

1-Découverte du théorème.

1-**Construire** un triangle ABC tel que AB = 4,5 cm et AC = 5,5 cm.

2-**Tracer** la hauteur [AH].

3-

a) **Utiliser** les relations trigonométriques, dans le triangle ABH, rectangle en H, **pour exprimer** sin $\widehat{B}$:

....

b) **En déduire** une expression de AH en fonction de sin $\widehat{B}$ et AB. ....

c) **Utiliser** les relations trigonométriques, dans le triangle ACH, rectangle en H, **pour exprimer** sin $\widehat{C}$

....

d) **En déduire** une expression de AH en fonction de sin $\widehat{C}$ et AC. ....

4-En déduire la relation suivante : $\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{C}}$

....

5-Mesurer sur la figure, les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ et compléter le tableau suivant :

$\widehat{A}$ = ... $\widehat{B}$ = ... $\widehat{C}$ = ...

	$\dfrac{BA}{\sin \widehat{C}}$	$\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}$	$\dfrac{AC}{\sin \widehat{B}}$
Valeur exacte	....	....	....
Valeur arrondie à 10^{-1} près	....	....	....

6- **Conclure.**

....

....

7- **Tracer** le cercle circonscrit au triangle.

8-**Mesurer** son diamètre. **En déduire** son rayon. ....

9-**En déduire** une égalité entre la relation suivante $\boxed{\dfrac{AB}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{BC}{\sin \widehat{A}}}$ et le rayon.

....

2-Définition.

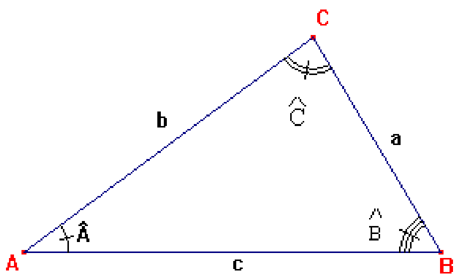
....

....

....

....

....



3- Dans quelle situation utiliser le théorème des sinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure de deux angles et la longueur d'un côté.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur de deux côtés et la mesure d'un angle non compris entre ces deux côtés.

4- Applications.

1- Calculer les longueurs du côté [AB] d'un triangle ABC tel que :

		Résolution
a)	**BC = 10 ; $\widehat{A}$ = 70° ; $\widehat{C}$ = 50°**	
FIGURE		
b)	**BC =8 ; $\widehat{B}$ = 50°; $\widehat{C}$ = 100°**	
FIGURE		

2- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle ABC tel que :

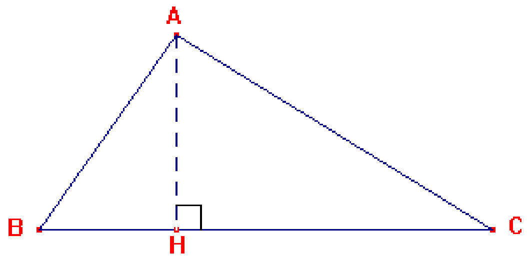
a)	**AB = 8 ; BC = 10 ; $\widehat{C}$ = 40°**	
FIGURE		
b)	**AB = 15 ; BC = 20 ; $\widehat{C}$ = 40°**	
FIGURE		

II- Théorème des cosinus ou théorème de Carnot.

1-Découverte du théorème.

a-premier cas : *Triangle quelconque dont tous les angles sont aigus.*

Soit le triangle quelconque ABC.



1-Travail dans le triangle rectangle ABH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ABH.

....

b) **Exprimer** BH en fonction de BC et HC.

....

c) **Donner** alors l'expression de AB².

....

.... **(1)**

2-Travail dans le triangle rectangle ACH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ACH.

....

b) **Exprimer** AH en fonction de AC et CH.

....

c) **Remplacer** l'expression de AH² dans la relation (1).

……………………………………………………………

……………………………………………………………

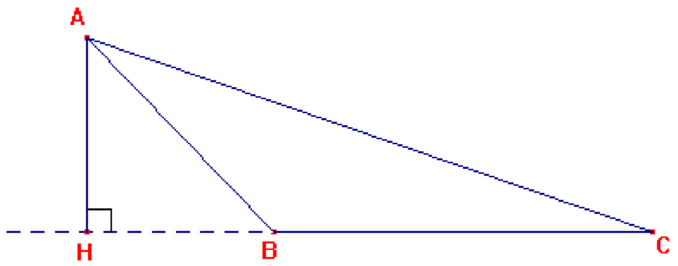
d) **Exprimer** CH en fonction de AC et de l'angle $\widehat{C}$.

……………………………………………………………

3- En **déduire** l'expression de AB^2 en fonction de AC, BC et $\widehat{C}$.

……………………………………………………………

b-deuxième cas : *Triangle quelconque dont l'un des angles est obtus.*



1- **Exprimer** BH en fonction de HC et BC.

……………………………………………………………

2- **Exprimer** AB^2 dans le triangle rectangle AHB.

……………………………………………………………

3- **Exprimer** AB^2 en fonction de AC, BC et HC.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

4- **Exprimer** CH en fonction de AC et de l'angle $\widehat{C}$.

……………………………………………………………

5- En déduire l'expression de AB^2 en fonction de AC, BC et $\widehat{C}$.

……………………………………………………………

4- Obtient-on le même résultat que dans le premier cas ?

……………………………………………………………

2-Définition.

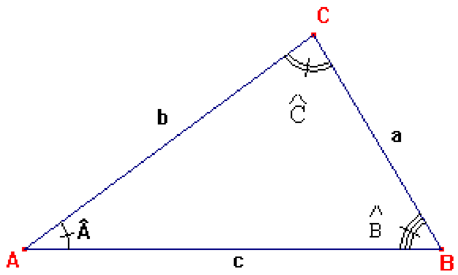
....

....

....

....

....



3-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure d'un angle et les longueurs de deux côtés.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur des trois côtés.

4-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

1-Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ du triangle ABC tel que :

		Résolution
a)	**AB = 8; AC= 7; BC = 6**	
FIGURE		
b)	**AB = 3; AC= 5; BC = 4**	
FIGURE		

2- Calculer la mesure de la longueur du côté [AB] du triangle ABC tel que :

a)	**AC = 15 ; BC = 19 ; $\widehat{C}$ = 115°**	
FIGURE		

b)	$AC = 10$; $BC = 20$; $\widehat{C} = 60°$	
FIGURE		

III-Aire d'un triangle.

1-Définition.

L'aire d'un triangle ABC est égale à :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}.b.c.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}.a.c.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}.a.b.\sin\widehat{C}}$$

2-Exemple.

Calculer l'aire du triangle ABC tel que :

$AB = 10$ cm ; $AC = 5$ cm ; $\widehat{A} = 60°$

…………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	

IV-Activités d'examen.

1- Calculer les angles d'un triangle ABC tel que :

$BC = 8$ cm ; $AC = 4$ cm ; $AB = 6$ cm

2- On considère le diagramme des forces appliquées à un solide en équilibre :

$F_1 = 100$ N ; $F_2 = 70$ N ; $F_3 = 50$ N

Calculer la mesure à 1° près de chaque angle de ce triangle.

3- On donne deux tensions $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ avec :

$U_1 = 14$ V et $U_2 = 18$ V ; $(\overrightarrow{U_1} ; \overrightarrow{U_2}) = -60°$

On pose $\vec{U}_T = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ et $\phi = (\overrightarrow{U_1} ; \overrightarrow{U_T})$.

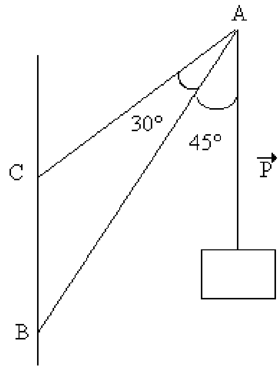
Déterminer U_T et ϕ_T

4-

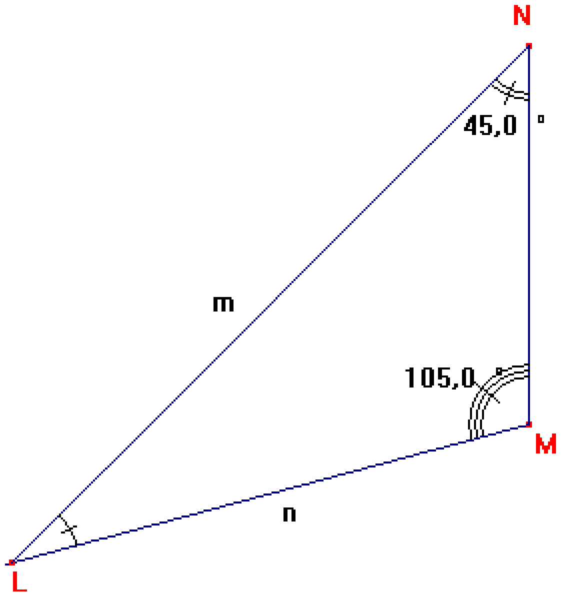
Au point A sont exercées :

-un poids $\vec{P}$ d'intensité 1500N.

-Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. exercées par les barres [AB] et [AC] dont les droites d'action sont celles des barres.



1)Déterminer les mesures m et n des côtés LN et LM du triangle LMN ci-contre pour MN = l = 15 cm. $\widehat{N} = 45°$; $\widehat{M} = 105°$.



2)On rappelle que la condition d'équilibre du point A s'écrit : $\boxed{\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}}$

a-Tracer le polygone, ou dynamique des forces.

b-En déduire le sens et l'intensité des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.