RACINE CARREE

Quelques rappels sur le carré d'un nombre

Objectif :
- Le carré d'un nombre est positif
- Deux nombres opposés ont le même carré

Activité :

1) Calculer les carrés des nombres suivants : -2 ; 5 ; 0.3 ; -1 ; 10^3 .
2) Quel est le signe du carré d'un nombre ?
3) Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des carrés ?
   25 ; 7^2 ; -16 ; 10^4 ; -100 ; 49.
4) Quels sont les nombres qui ont pour carré 36 ? 100 ?

Résumé

Le carré d'un nombre est toujours positif.
Exemples : $5^2 = 25$, $(-6)^2 = 36$
Deux nombres opposés ont le même carré.
$3^2 = (-3)^2 = 9$

Applications

1) Compléter le tableau suivant :

x	2,5	10^5	2^3	0,7	3^2
x^2					

2) Ecrire les nombres suivants sous forme de carré
   2^8 ; 3^4 ; 10^6 ; $2^6 \times 3^4$; $7^2 \times 3^8 \times 2^4$

Définition de la racine carrée d'un nombre positif

Activité :

On considère un triangle ABC rectangle en A

1) Sachant que AB = 3 cm et AC = 4 cm,
   a) Calculer la valeur exacte de BC.
   b) Quels sont les nombres qui ont pour carré 25 ? Pourquoi a-t-on BC = 5 ?
   c) Compléter la phrase suivante :
      « BC est le nombre positif dont le carré est …. »

2) On suppose maintenant que AB = 2 cm et AC = 3 cm.
   a) Compléter la phrase suivante :
      « BC est le nombre positif dont le carré est … »
   b) Rechercher la valeur exacte de BC.

Commentaire

On dira que la valeur exacte de BC est **la racine carrée** de 13 que l'on notera $\sqrt{13}$.

3) Peut-on obtenir la racine carrée de –16 ?

   La racine carrée d'un nombre négatif existe-t-elle ?

Commentaires

x étant un nombre positif, il existe deux nombres opposés dont le carré est x. Par convention, la racine carrée de x est celui de ces deux nombres qui est positif.

Il faut retenir

Soit un nombre positif x. la racine carrée du nombre positif x est le nombre positif dont le carré est x. On le note $\sqrt{x}$.

Si $y = \sqrt{x}$ alors $\begin{cases} x \text{ est positif} \\ y \text{ est positif} \\ y^2 = x \end{cases}$

Exemples : $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{6{,}25} = 2.5$

Remarque : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Applications

1°/ Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Justifier les réponses.

$\sqrt{16} = -4$; $\sqrt{-81} = 9$; $\sqrt{6} = 3$; $\sqrt{49} = 7$

2°/ Calculer sans utiliser la calculatrice :

$\sqrt{4}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{100}$.

3°/ x étant un nombre positif, compléter le tableau suivant :

x	49		7	-16		106	
Racine carrée de x		3			$\sqrt{5}$		$\sqrt{2}$

4°/ Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des carrés ? Dans ce cas, de quels nombres sont-ils les carrés ?

81 ; 27 ; 10 ; -4 ; 2 ; -25.

5°/ Utilisation de la touche $\sqrt{.}$ de la calculatrice.

On considère un carré dont l'aire est 127 cm². Soit y la longueur de son côté.

1) Déterminer la valeur exacte de y.
2) Donner un arrondi au mm de y.

Racine carrée et opérations

Activité :

Calculer puis comparer :

1) $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$ et $\sqrt{4 \times 25}$ $\qquad$ $\sqrt{16} \times \sqrt{9}$ et $\sqrt{16 \times 9}$

2) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$ et $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$ et $\sqrt{\dfrac{16}{9}}$

<u>Il faut retenir</u>

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est égale au produit de leurs racines carrées.
Si a et b sont positifs, alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemples : $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$.
$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

<u>Cas particulier</u>
Si a est positif alors $\sqrt{a^2} = a$. Par exemple : $\sqrt{5^2} = 5$

La racine carrée du quotient de deux nombres positifs est égale au quotient de leurs racine carrées.
Si a et b sont positifs et $b \neq 0$ alors $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exemples : $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$

$\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$

<u>Remarques</u> :

1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$.
En effet : $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ et $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
2) De même $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$

Applications

1°/ Sans utiliser la calculatrice, trouver la valeur exacte des nombres suivants :

$\sqrt{2} \times \sqrt{18}$; $\sqrt{25 \times 49}$; $\sqrt{11^2}$; $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 7^2}$; $\sqrt{7} \times \sqrt{2^2 \times 7}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3}$;

2°/ Sans utiliser la calculatrice, trouver la valeur exacte des nombres suivants :

$\sqrt{4^2 \times 5}$; $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{5^2 \times 2^6}$; $\sqrt{8100}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{10^2} \times \sqrt{10^3 \times 10^3}$

Ecriture sous la forme $a\sqrt{b}$

Activité :

1) Ecrire chacun des nombres sous la forme $c^2 \times d$ où c et d sont deux entiers, d étant le plus petit possible.
   Exemple : $48 = 16 \times 3 = 4^2 \times 3$
   300 ; 50 ; 8 ; 50 ; 12
2)
3) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

Exemple : $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$;

$\sqrt{300}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{12}$;

Applications

I) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$.

$\sqrt{98}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{75}$;

II) Calculer et simplifier l'écriture si possible

$\sqrt{20} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{15} \times \sqrt{35}$; $3\sqrt{27} \times 2\sqrt{15}$

III) Simplifier les écritures des nombres suivants :

$A = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$
$B = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 19\sqrt{3}$
$C = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 4\sqrt{5} + \sqrt{7} + 10$

IV) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$

$A = \sqrt{18} + \sqrt{98}$
$B = 3\sqrt{5} + \sqrt{180} - 2\sqrt{45}$
$D = \sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$
$E = \sqrt{3} - \sqrt{12}$

Rendre entier le dénominateur d'un quotient

Activité

1) Compléter $\left(\sqrt{3}\right)^2$; $\sqrt{7^3} = \ldots\ldots\sqrt{7}$
2) Trouver un quotient égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ayant un dénominateur entier.

<u>Résumé</u>

Méthode : Rendre entier le dénominateur d'un quotient.

Exemple : $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Applications

Simplifier puis rendre entier le dénominateur des quotients suivants

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$;

Equation $x^2 = a$ avec a positif

Travail élève

Trouver tous les nombres x tels que

1) $x^2 = 64$
2) $x^2 = 3$
3) $x^2 = a$ avec a positif.

<u>Résumé</u>

Soit a un nombre positif. L'équation $x^2 = a$, admet deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exemple : $x^2 = 25$ a pour solutions $x = 5$ et $x = -5$

$x^2 = 7$ a pour solutions $x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$

Applications

I) Résoudre les équations suivantes

$y^2 = 11$; $75 = 3x^2$; $-7b^2 = -1183$

II) Si on additionne 18 au carré d'un nombre, on obtient 162. Quel est ce nombre ?

EXERCICES

1°/ Un échiquier est un carré composé de 64 cases carrées.
Combien y a-t-il de cases par rangées ?
L'échiquier a une surface de 655,36m^2.Quelle est la dimension d'une case. Faire le calcul de deux façons.

2°/ Un rectangle R_1 d'aire 6996,08 cm^2 est un agrandissement d'un rectangle R_2 d'aire 182 cm^2. Calculer le coefficient d'agrandissement.

3°/ Soit un carré ABCD tel que AB = 7 cm. Calculer la valeur exacte de la diagonale [AC].
Même question lorsque AB = a.

4°/ Sans utiliser la touche "$\sqrt{\ }$" de la calculatrice, déterminer la valeur exacte de des nombres suivants :
$\sqrt{3} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{80} \times \sqrt{5}$; $\sqrt{40 - 4}$; $\sqrt{61 + 3}$; $\sqrt{36 \times 49}$; $\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2}$; $\sqrt{10^4 \times 10^6}$; $\sqrt{3^4 \times 10^2}$

5°/ Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un entier le plus petit possible.
$\sqrt{5 \times 7^2}$; $5\sqrt{7 \times 6^2}$; $\sqrt{10^3}$; $\sqrt{2^6 \times 5 \times 3^4}$;
$\sqrt{162}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{300}$; $\sqrt{75}$;

6°/ Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$A = \sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$
$B = \sqrt{64} - \sqrt{80} + 3\sqrt{45}$
$C = 2\sqrt{75} \times \sqrt{6}$

7°/ Développer et réduire
$A = (2 + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$
$B = (3 + \sqrt{11}) - (3 - \sqrt{11})$
$C = 2(\sqrt{3} - 5) - 7(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

8°/ On donne $a = \sqrt{2}$ et $b = 1 - \sqrt{2}$. Ecrire sous la forme $x + y\sqrt{2}$ les nombres suivants :
a^2 ; ab ; a^3 ; $a - b\sqrt{2}$; $a\sqrt{2} - 2y$;

9°/ Résoudre les équations suivantes
$x^2 = 25$; $y^2 = 5$; $\sqrt{2}t^2 = \sqrt{8}$;

10°/ Soit $A = (5x + 3)(x - 2) - 7(2x + 3)$
Développer A
Calculer A pour $x = \sqrt{2}$

Racine carrée et géométrie

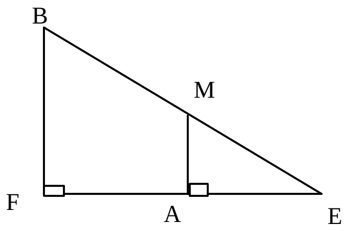
$\widehat{B}$ est un angle aigu tel que cos $\widehat{B} = \sqrt{5}/3$.
Déterminer la valeur exacte de sin $\widehat{B}$ et tan $\widehat{B}$.

On considère un triangle MON rectangle en O et tel que : MO = 4cm et ON = 2cm.
Calculer MN
Calculer l'aire du triangle MON et en déduire la longueur de la hauteur [OH].
Simplifier l'écriture de OH.

ABC est un triangle équilatéral tel que AB = 8 cm.
Soit [AH] la hauteur issue de A.
Montrer que H est le milieu de [BC]. En déduire BH.
Calculer la valeur exacte de AH. Donner un résultat simplifié.
Quel est la mesure de l'angle $\widehat{B}$?
Déterminer la valeur exacte de sin 60°. Simplifier le résultat.
En déduire la valeur exacte de cos 30°.

Calculer AH lorsque AB = a. Simplifier l'écriture de AH.

On considère le dessin suivant. Sachant que EF = $\sqrt{24}$cm, BF = $\sqrt{3}$cm, AM = 1 cm ;
Calculer les valeurs exactes des nombres suivants. Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.



AE
BE
EM
l'aire des triangles EBF et EAM.